محاضرة الثالثة :نظريات الجبر البولي

د. سمير امبارك

نظريات الجبر البولياني

هو جبر المتغيرات المنطقية، و الهدف الأساسي من دراستنا لنظريات الجبر البولياني هو استخدام تلك النظريات في تبسيط التعبيرات المنطقية.

لكل نظرية من نظريات الجبر البولياني نظرية مقابلة (dual) أو مناظرة لها للحصول على النظرية المقابلة لأي نظرية نقوم بإجراء التبديلات التالية في النظرية الأصلية:

استبدال أي 0 بـ 1

استبدال أي 1 بـ 0

استبدال أي عملية AND بعملية OR

استبدال أي عملية OR بعملية AND

يمكن إثبات صحة أي نظرية باستخدام جداول الصواب.

الجدول التالي يوضح النظريات الأساسية المستخدمة في الجبر البولياني.

اسم النظرية	النظرية	النظرية المقابلة
عكس العكس	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
العمليات مع 1 و 0	$A+1=1$ $A+0=A$	$A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = A$
المتغير مع نفسه	$A+A=A$	$A \cdot A = A$
المتغير مع عكسه	$A+\overline{A}=1$	$A \cdot \overline{A} = 0$
النظرية الإبدالية	$A+B=B+A$	$A \cdot B = B \cdot A$
النظرية التجميعية	$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
النظرية التوزيعية	$A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A+B) \cdot (A+C)$
الامتصاص أو الابتلاع	$A + A \cdot B = A$ $A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (A+B) = A$ $A \cdot (\overline{A}+B) = A \cdot B$
دي مورغان (De Morgan)	$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

الصيغة العامة لنظرية دي مورغان

$$F(X, \overline{Y}, +, .)$$

$$\overline{F}(\overline{X}, Y, ., +)$$

مثال 1 :

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي الاتي ثم ارسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط و بعده.

$$y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$$

الحل:

$y = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$

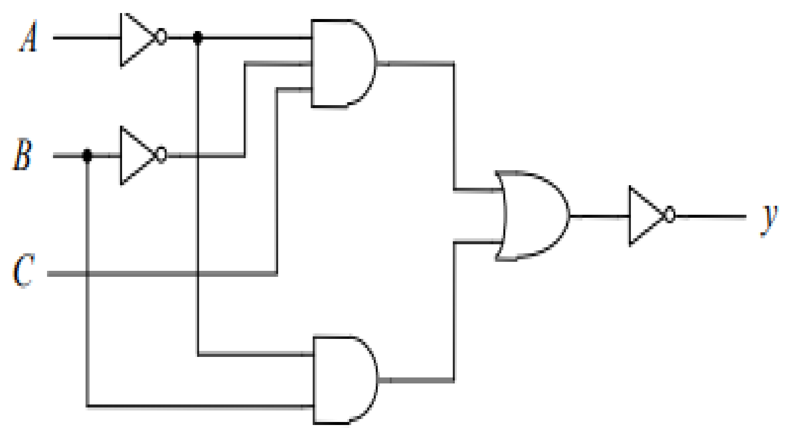
$y = (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{C}) \cdot (\overline{\overline{A}} + \overline{B})$ دي مورغان

$y = (A + B + \overline{C}) \cdot (A + \overline{B})$ عكس العكس

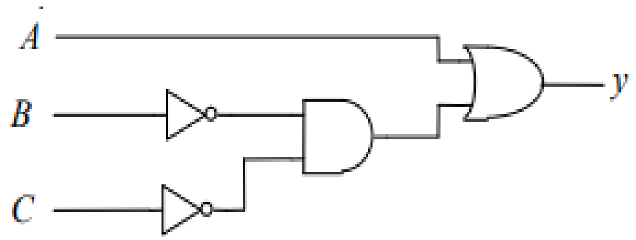
$y = A + (B + \overline{C}) \cdot \overline{B}$ التوزيعية

$y = A + \overline{C}\,\overline{B}$ الابتلاع

الدائرة قبل التبسيط



الدائرة بعد التبسيط



لاحظ أن الدائرة قبل التبسيط مكونة من 6 بوابات، و بعد التبسيط أصبحت مكونة من 4 بوابات فقط.

مثال 2 :

استخدم نظريات الجبر البولياني فى تبسيط التعبير المنطقي الاتي

$$y = \overline{A}(A+B)+\overline{C}+CB$$

ثم ارسم الدائرة المنطقية قبل التبسيط و بعده.

الحل :

$$y = \overline{A}(A+B)+\overline{C}+CB$$

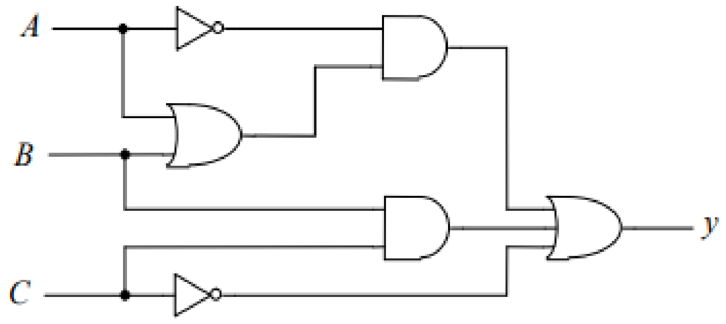
$$y = \overline{A}B+\overline{C}+CB$$ الابتلاع

$$y = \overline{A}B+\overline{C}+B$$ الابتلاع

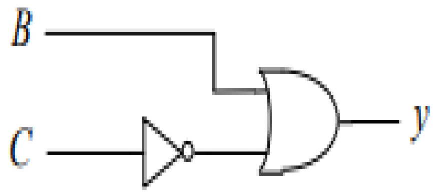
$$y = \overline{A}B+B+\overline{C}$$ الإبدالية

$$y = B+\overline{C}$$ الابتلاع

الدائرة قبل التبسيط



الدائرة بعد التبسيط



مثال 3 :

استخدم نظريات الجبر البولياني في تبسيط التعبير المنطقي الاتي

$$F = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

الحل

$$F = \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.B.\bar{C} + A.B.C + A.\bar{B}.\bar{C}$$

$$F = \bar{A}\,(\bar{B}C + B\bar{C}) + A\,(BC + \bar{B}\bar{C})$$ التوزيعية

لنفرض ان

$$Y = (\bar{B}C + B\bar{C}) \qquad Y = B \oplus C$$ معادلة بوابة XOR

$$\bar{Y} = (B + \bar{C}) . (\bar{B} + C)$$ لنظرية دي مورجان

$$\bar{Y} = B\bar{B} + BC + \bar{C}\bar{B} + \bar{C}C$$ التوزيعية

$$\bar{Y} = BC + \bar{C}\bar{B}$$ المتغير مع عكسه

بالتعويض بقيمة $\overline{Y}$, Y في اخر معادلة لf

$F = \overline{A}\,Y + A\,\overline{Y}$

$F = A \oplus Y$ معادلة بوابة XOR

$F = A \oplus B \oplus C$

اذا فالمعادلة

$F = \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C} + A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C}$

يمكن اختصارها

$F = A \oplus B \oplus C$

انتهت المحاضرة