من كتاب

الطرق العددية باستخدام فورتران FORTRAN

الدكتور عمر زرتي

تنبيه: هذا الشيت من الكتاب ويعرض فيها بعض أمثلة وقد يكون بها برمجة بلغة الفورتران ونحن في هذا الكورس نستخدم الماتلاب, ولكن النظر الى اكثر من لغة برمجة يعطي الطالب المام بالمخطط الانسيابي واستخدام الدوال بالبرنامج واستخدام الطرق العددية في البرنامج.

في هذا الشيت:

ايجاد الجذور للدوال ذات المجهول الواحد باستخدام الطرق الاتية:

طريقة الرسم (Graphical Method)

طريقة التنصيف (Bisection Method)

طريقة النقطة الثابتة (Fixed point iteration Method)

طريقة نيوتن (Newton Method)

Or Some call it:

(Newton-Raphson Method)

حل المعادلات

Solution of Equations

وايجاد الجذور للدوال

1.1 مقدمة

يستعمل اصطلاح «**حل المعادلة**» للتعبير عن عملية إيجاد قيمة المجهول x التي تحقق المعادلة. فمثلاً المعادلة:

$$2x + 3 = 0 \tag{1.1}$$

يمكن حلها بإضافة 3− للطرفين الأيمن والأيسر، ثم القسمة على 2 لنحصل على:

$$x = -3/2 \tag{1.2}$$

وإذا عرفنا الدالة:

$$f(x) = 2x + 3$$

فإن $x = -3/2$ تعتبر جذْراً للدالة $f(x)$. وأحياناً يستعمل اصطلاح «**إيجاد جذور المعادلة**» للدلالة على حل المعادلة. لاحظ أن المعادلة (1.1) هي معادلة خطية، أي أن المجهول x يظهر في المعادلة بأسٍّ يساوي الواحد؛ فمثلاً المعادلة:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{1.3}$$

ليست معادلة خطية حيث إن أكبر أس للمتغيّر x هـو 2، أي أنها معادلـة من الدرجة الثانية. ويمكن حل هذه المعادلة باستعمال القانون المعروف:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

وبالتالي فإن لهذه المعادلة حلّين، هما:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

والسؤال الآن هو ما إذا كان بالإمكان حل معـادلات من الدرجـة الثالثـة فما فوق؟ والجواب هو أن ذلك ممكن في حالة الدرجة الثالثة والرابعة وإن كان الحل ليس سهلاً على الاطلاق. أما عدا ذلك فإن اللجوء إلى الحلول التقريبية أمـر لا مفر منه.

أما المعادلات التي تحتوي على الدوال المثلثية والدوال الأسية، فإن حلها عادة ما يكون غير ممكن إلاّ بالطرق التقريبية. والأمثلة على ذلك المعادلات التالية:

$$x - \cos x = 0 \qquad (1.4)$$

$$e^x - x - 2 = 0 \qquad (1.5)$$

$$\ell og\ x + x - 10 = 0 \qquad (1.6)$$

ولهـذا فإن دراسـة **الطرق العـددية** لإيجـاد الحلول التقريبيـة لهـذه المعـادلات وغيرها تعتبر من المواضيع الهامة جداً.

1.2 طريقة الرسم Graphic Method

لإيجـاد حل تقـريبي للمعادلـة $f(x) = 0$، نستعمل طـريقة الـرسم البيـاني، وذلك برسم المنحنى $f(x)$ وإيجاد نقطة تقاطع هذا المنحنى مع محور السينات.

مثال (2.1): **أوجد حلاً تقريبياً للمعادلة:**

$$f(x) = e^x - x - 2 = 0$$

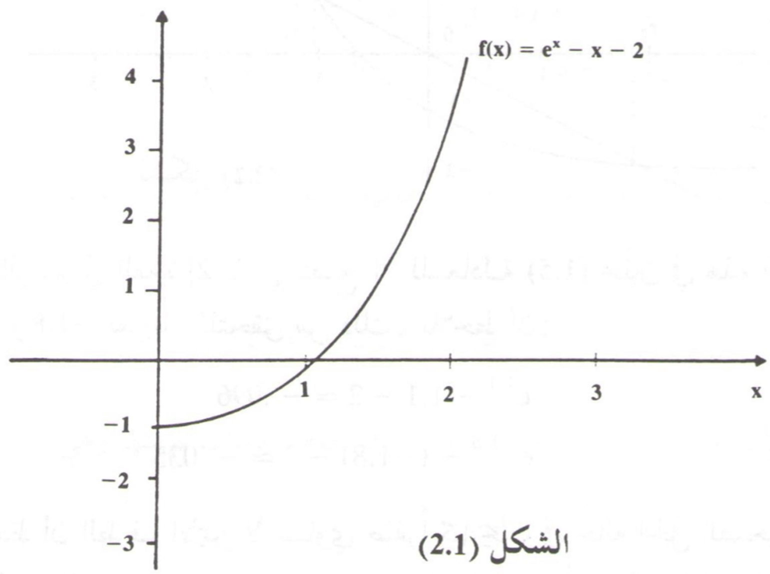
في الفترة $[0, 4]$.

أولاً نـوجد قيم f(x) لبعض قيم x حتى نتمكن من رسم هـذه الدالـة، عـلى النحو التالي:

x	0	1	2	3	4
f(x)	−1	−.28	3.4	15	49

لاحظ أن قيم f(x) قـد تم حسابهـا في هذا الجـدول مقربـة لأقرب رقمـين، حيث إن الرسم لا يحتاج لدقة أكثر من ذلك.

والآن نوصل منحنى بين النقاط المبينة على النحو التالي (شكل 2.1):



الشكل (2.1)

يتبين من هذا الرسم التقريـبـي أن الجذر هو x = 1.1 تقريباً.

ملاحظة:

بالإمكان كتابة المعادلة:

$$e^x - x - 2 = 0$$

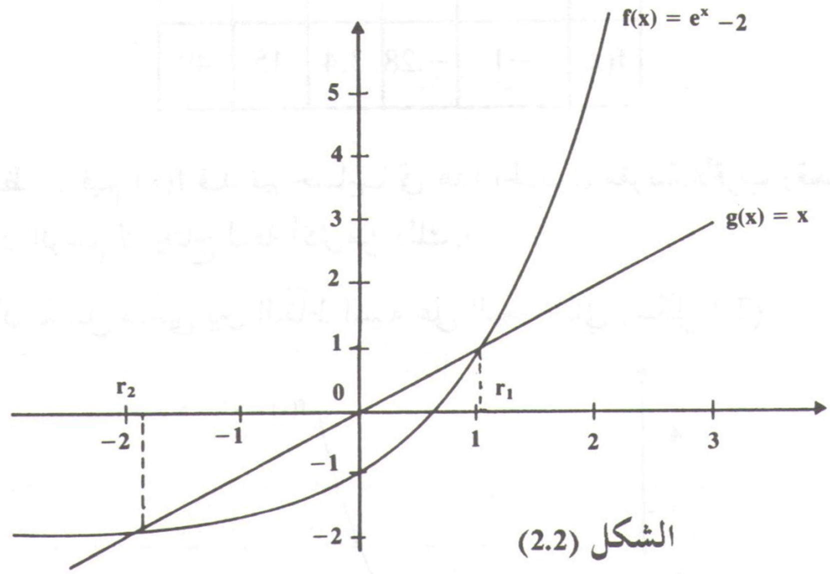
على النحو:

$$e^x - 2 = x$$

وبالتالي فإن الجذور تقع عند نقط تقاطع الدالتين (المنحنيين):

$$g(x) = x \quad , \quad f(x) = e^x - 2$$

وكما هو مبين في شكل (2.2).



الشكل (2.2)

من الرسم في الفترة [2 ,2−] يتضح أن للمعادلة (1.5) حلّين في هذه الفـترة هما 1.1 و 1.8− تقريباً. للتحقق من ذلك، نلاحظ أن:

$$e^{1.1} - 1.1 - 2 \simeq -\ .096$$

و:

$$e^{-1.8} - (-1.8) - 2 \simeq -\ .035$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن لا يساوي صفراً كما يجب في حالة الحل الصحيح، ولكن القيم المتحصل عليها تعتبر قريبـة من الصفر نسبيـاً، ويمكن الاستفادة من الجذور التقريبية كبداية في عملية تكرارية للحصول على جذور أصح. من هـذه الطرق طريقة التنصيف.

1.3 طريقة التنصيف Bisection Method

بالإمكان توضيح هذه الطريقة التي تعتمد على محاصرة الجـذر في فترة تصغـر في كل مرة بمقدار النصف بالمثال التالي:

مثال (3.1):

أوجد حل المعادلة:

$$f(x) = \cos x - x = 0$$

في الفترة [0.5, 1.5] بطريقة التنصيف.

أولاً يجب أن نتـأكد أن f(.5) و f(1.5) مختلفتـان في الإشارة، وهـذا صحيـح حيث إن:

$$f(.5) = 0.38,\ f(1.5) \simeq -1.43$$

إذن فهناك جذر للدالة f(x) في الفترة [.5, 1.5] حيث إن هذه الدالـة مستمرة continuous ولكي تتغير قيمتها من السـالب إلى الموجب لا بـد أن تمـرّ بمحـور السينات.

أول قيمة تقريبية للجذر نتحصل عليها بأخذ نقـطة المنتصف للفترة [.5, 1.5] وهي:

$$c_1 = \frac{.5 + 1.5}{2} = 1$$

$$c_1 = \frac{.5 + 1.5}{2} = 1$$

والآن نحتاج لمعرفة إشارة $f(c_1)$ ولذلك نقوم بحساب قيمتها وهي :

$$f(c_1) = f(1) = -\ 0.46$$

أي أنها سالبة، وهذا يعني أن الجذر المطلوب يقع في الفترة [0.5,1] حيث إن f(x) تتغير إشارتها من الموجب عند 0.5 إلى السالب عند 1. إذن تكون القيمة التقريبية الثانية للجذر عند نقطة المنتصف للفترة [0.5,1] وهي :

$$\mathbf{c_2} = \frac{0.5 + 1}{2} = 0.75$$

وحيث إن :

$$\mathbf{f(c_2)} = f(0.75) \simeq -\ .018$$

وهي سالبة، فإن الجذر يقع في الفترة [0.5, 0.75]، وبالتالي فإن القيمة التقريبية الثالثة هي :

$$c_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

وهي سالبة، فإن الجذر يقع في الفترة [0.5, 0.75]، وبالتالي فإن القيمة التقريبية الثالثة هي :

$$c_3 = \frac{0.5 + 0.75}{2} = 0.625$$

وحيث إن :

$$f(c_3) \simeq 0.186$$

وهي قيمة موجبة، فإن الجذر يقع في الفترة [0.625, 0.75] وبالتالي :

$$c_4 = \frac{0.625 + 0.75}{2} = 0.6875$$

$$f(c_4) = 0.085$$

أي أن الجذر يقع في الفترة [0.6875, 0.75]، وبالتالي فإن :

$$c_5 = (0.6875 + 0.75)/ 2 = 0.71875$$

ونجد أن :

$$f(c_5) \simeq 0.034$$

وكما هو واضح فإن هذه الطريقة تتطلب عدداً كبيراً من العمليات المتكررة «iterations»، ولكن استعمال الحاسوب في الحسابات يجعل ذلك مقبولاً، ويسهل هذه الصعوبة.

والسؤال الذي يطرح الآن: **متى نتوقف؟ أي كم عملية تكرارية نحتاج لها للحصول على الحل المطلوب؟**

والجواب هو أن عدد العمليات (أو الدورات) يزداد بازدياد الدقة المطلوبة [والمقصود بكلمة **الدقة** هو عدد الخانات الصحيحة في الجذر التقريبي ابتداءً من اليسار، فإذا كان الجذر الصحيح مثلاً هو 0.1234 والجذر التقريبي هو 0.12 فإن هذا التقريب دقيق لخانتين صحيحتين هما 12].

فإذا كان المطلوب أن يكون الجذر التقريبي مطابقاً تماماً للجذر الصحيح فإن

ذلك قد يتطلب عدداً **لا نهائياً** من الدورات، وبالتالي فإننا عادة ما نكتفي بالشرط:

$$|f(c_n)| < \varepsilon \qquad (3.1)$$

بدلاً من $f(c_n) = 0$، حيث ε رقم صغير، كلما صغر زادت دقة c_n وزاد عدد الدورات n. وحيث إن هذا الاستبدال يعتبر **تنازلاً وتسامحاً**، فإن المتباينة (3.1) تسمى **حالة التسامح Tolerance condition** ويسمى الرقم ε برقم التسامح.

والآن بالإمكان تلخيص طريقة التنصيف (أو بتعبير آخر خوارزمية التنصيف) في الخطوات التالية:

1 ـ **المعطيات هي: الفترة $[a_1, b_1]$ التي يقع داخلها الجذر بحيث:**

$$f(a_1)\, f(b_1) < 0$$

رقم التسامح ε (وهو رقم صغير مثل 10^{-6})

2 ـ إبدأ بقيمة $i = 1$.

3 ـ أحسب نقطة المنتصف:

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

4 ـ إذا كان

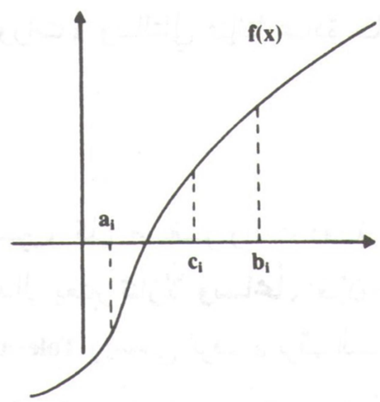
$$|f(c_i)| < \varepsilon$$

فاطبع قيمة c_i وتوقف.

5 ـ إذا كان $f(a_i)\, f(c_i) < 0$ فاجعل $b_{i+1} = c_i$ (أي أن b_{i+1} تأخذ قيمة c_i) وإلّا فاجعل $a_{i+1} = c_i$. في الحالة الأولى $a_{i+1} = a_i$ وفي الحالة الثانية $b_{i+1} = b_i$.

6 ـ إرجع إلى الخطوة (3) مع إضافة 1 إلى i.

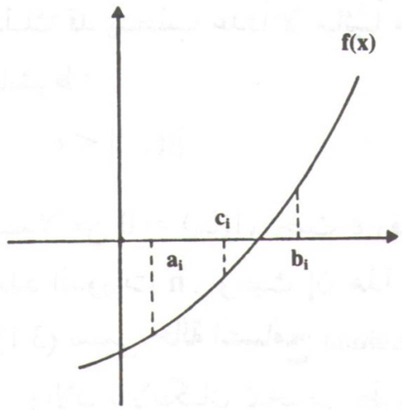
ولتوضيح الخطوة (5)، نقوم برسم الحالتين في هذه الخطوة في شكل (3.2).



$f(a_i)\, f(c_i) < 0$

$b_{i+1} = c_i$

$a_{i+1} = a_i$



$f(a_i)\, f(c_i) > 0$

$a_{i+1} = c_i$

$b_{i+1} = b_i$

مثال (3.2):

برنامج بلغة فورتران لطريقة التنصيف

اكتب برنامجاً بلغة فورتران مستعملا طريقة التنصيف لحل المعادلة:

$$e^{-x} = x$$

نلاحظ أن الدالة:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

تتغير إشارتها بحيث:

$$f(0) > 0, f(1) < 0$$

أي أن:

$$f(0)\, f(1) < 0$$

وبالتالي يمكن اعتبار أن الجذر يقع في الفترة (0, 1) وأخذ هذه الفترة كفترة ابتدائية:

```
c  ....  BISECTION METHOD........
         F(X) = EXP(-X)-X
         EPS = 0.00001
         A = 0
         B = 1
         FA = F(A)
5        C = (A+B)/2
         FC = F(C)
         IF (ABS(FC) - EPS) 20,10,10
10       TEST = FA * FC
         IF (TEST.GT.0) THEN
                A = C
                FA = FC
         ELSE
                B = C
         ENDIF
         GOTO 5
20       WRITE (*,30) C,FC
30       FORMAT ( 'APPROXIMATE ROOT = ' ,E12.5, 10X,
       * ' F (ROOT) = ', E12.5)
         STOP
         END
```

ملاحظة :

لاحظ أن الدالة F(x) يتم استدعاؤها وإيجاد قيمتها مرة واحدة في كل دورة في البرنامج المذكور وذلك توفيراً لوقت الحاسب خاصة في حالة وجود دالة يتطلب حسابها وقتاً طويلاً.

تقدير الخطأ في طريقة التنصيف:

إذا كانت c هي القيمة التقريبية للقيمة الصحيحة t فإن **الخطأ المطلق** يعرف كالآتي:

$$e_a = t - c \tag{3.2}$$

أما **الخطأ النسبي** فهو:

$$e_r = \frac{t - c}{t} \quad , t \neq 0 \tag{3.3}$$

لتقدير الخطأ في القيمة التقريبية للجذر نلاحظ أن الفترة التي تحتوي على الجذر (a_n, b_n) في الدورة n يكون طولها ℓ_n نصف طول الفترة في الدورة

السابقة. أي أن طول الفترة ينقص بمقدار النصف في كل دورة بحيث:

$$\ell_n = b_n - a_n = \frac{1}{2} \ \ell_{n-1}$$

وأيضاً:

$$\ell_{n-1} = \frac{1}{2} \ \ell_{n-2}$$

إذن:

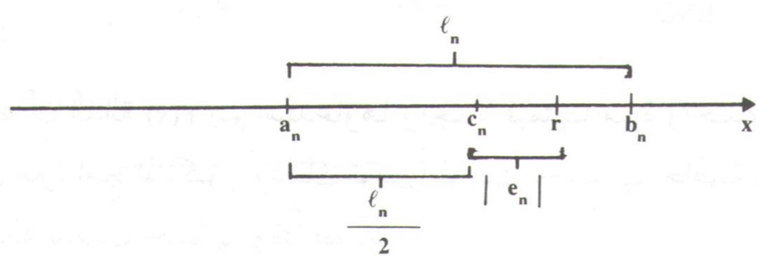
$$\ell_n = \frac{1}{2^2} \ \ell_{n-2}$$

وبصورة عامة:

$$\ell_n = \frac{1}{2^{n-1}} \ \ell_1 \qquad (3.4)$$

حيث ℓ_1 طول الفترة الابتدائية.

وكما هو واضح من الشكل (1.3):



شكل (1.3)

فإن الخطأ المطلق e_n في الدورة n من طريقة التنصيف يحقق ما يلي:

$$|e_n| < \ell_n / 2 \qquad (3.5)$$

وبالتالي، من (3.4) ينتج أن:

$$|e_n| < \frac{\ell_1}{2^n} \qquad (3.6)$$

ومن ذلك نستنتج أن الخطأ المطلق في طريقة التنصيف يؤول إلى الصفر عندما يؤول عدد الدورات إلى ما لا نهاية، وبعبارة أخرى نقول إن طريقة

التنصيف لها خاصيـة التقـارب convergence. وهـذه الخاصيـة مهمـة جـداً في التحليل العددي ولا تتوفر في كثير من الحالات.

مثال (3.2) :

ما عدد الـدورات التي قد تلزم في طريقة التنصيف للحصـول على جـذر تقريبي C_n بحيث يكون الخطأ المطلق في C_n لا يتجاوز 0.00001 علماً بأن طول الفترة الابتدائية هو 1.

نفترض أن :

$$\frac{\ell_1}{2^n} \leqslant 0.00001$$

وبما أن $\ell_1 = 1$ فإن

$$2^n \geqslant 100000$$

بأخذ لوغاريتم الطرفين، نحصل على :

$$\begin{aligned} n &\geqslant (5/\ \ell og\ 2) \\ &\geqslant 16.6 \end{aligned}$$

وبما أن n يجب أن تكون عدداً صحيحاً، فإن :

$$n = 17$$

تحقق المـطلوب، أي أن 17 دورة في طريقـة التنصيف تحقق خطـأً مـطلقـاً لا يتجاوز 0.00001 في حالة أن طول الفترة الابتدائية هو 1.

1.7 طريقة النقطة الثابتة (Fixed-Point Method)

تعتمد هذه الطريقة على تحويل المعادلـة $f(x) = 0$ إلى شكل مكـافىء لها عـلى النحو:

$$x = g(x)$$

ثمّ استعمال القاعدة التكرارية:

$$x_{i+1} = g\,(x_i) \tag{7.1}$$

وكمثال على ذلك، القاعدة (6.4) و (6.5) في طريقـة نيوتن، والنقـطة r التي تحقق:

$$r = g(r)$$

تسمى **نقطة ثابتة** للدالة $g(x)$، ومن هنا جاءت تسمية هذه الطريقة.

> مثال **(7.1)**:
>
> اكتب المعادلة:
>
> $$f(x) = x^2 - 7x + 10 = 0$$
>
> على النحو $x = g(x)$.

بالإمكان وضع هذه المعادلة على النحو المطلوب بعدة طرق، نختار منها ما يلي:

$$1-\quad g(x) = \frac{x^2 + 10}{7} = x$$

$$2-\quad g(x) = \sqrt{7x - 10} = x$$

$$3-\quad g(x) = x^2 - 6x + 10 = x$$

والآن نستعمل طريقة نيوتن، وذلك بوضع:

$$-\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

لنحصل على:

$$g(x) = \frac{x^2 - 10}{2x - 7}$$

مثال (7.2):

استعمل طريقة النقطة الثابتة لإيجاد حل تقريبي للمعادلة

$$x = \cos x$$

مبتدئاً بالقيمة $x_0 = 1$ مع التوقف عندما $|x_i - x_{i-1}| < 0.002$

من الواضح هنا أن أبسط شكل للدالة $g(x)$ هو:

$$g(x) = \cos(x)$$

وبالتالي فإن:

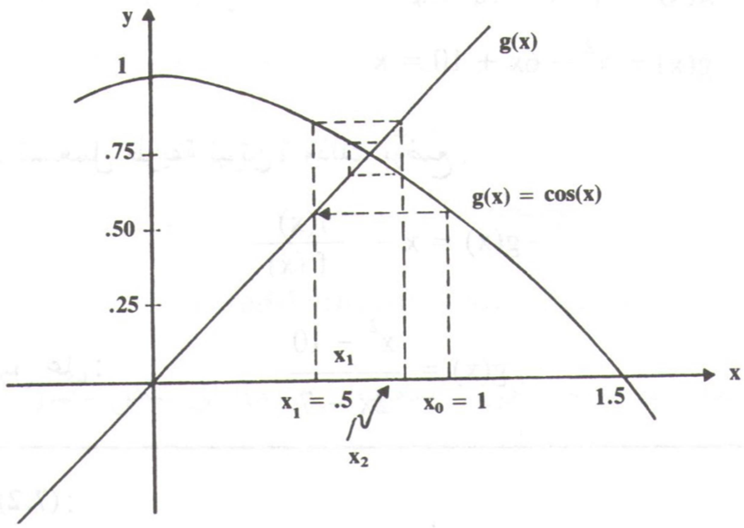
$$x_1 = g(x_0) = \cos(1) = 0.540302$$
$$x_2 = g(x_1) = 0.857553$$
$$x_3 = g(x_2) = 0.654290$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{14} = 0.738369$$
$$x_{15} = 0.739560$$

وبما أن:

$$|x_{15} - x_{14}| = .001191 < .002$$

فنتوقف عن الدورات كما هو مطلوب.

وبالإمكان توضيح هذا المثال بالرسم التالي (شكل 7.1).



شكل (7.1)

ويمكن الآن تلخيص طريقة النقطة الثابتة في الخطوات التالية:

1 - حدد المعطيات: $g(x)$، x_0، max، ϵ.

2 - نفذ الخطوات (3) إلى (6) من $i = 1$ إلى $i = max$.

3 - أحسب $x_{i+1} = g(x_i)$

4 - إذا كان $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$ توقف.

5 - إرجع إلى الخطوة (3).

وهذه الخطوات تكتب في برنامج فرعي بلغة فورتران كما يلي:

```
      SUBROUTINE FPM (G, XO, MAX, EPS, X1, I)
      DO 100 I = 1, MAX
      X1 = G (XO)
      IF (ABS (X1 − XO) · LT · EPS) RETURN
      XO = X1
100   CONTINUE
      RETURN
      END
```

1.6 طريقة نيوتن (Newton's Method)

نلاحظ أن طريقة القاطع تعتمد على القاعدة:

$$c_i = b_i - \frac{f(b_i)}{s_i} \tag{6.1}$$

حيث:

$$s_i = \frac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}$$

هو ميل المستقيم الواصل بين النقطتين $(a_i, f(a_i))$ و $(b_i, f(b_i))$. كما نلاحظ أنه إذا كانت النقطتان قريبتين ومتلاصقتين فإن:

$$f'(b_i) \simeq s_i$$

حيث $f'(b_i)$ هي قيمة المشتقة الأولى عند b_i وتمثل ميل المماس عند هذه النقطة. وإذا استعملنا:

$$x_{i+1} = c_i$$
$$x_i = a_i \simeq b_i$$

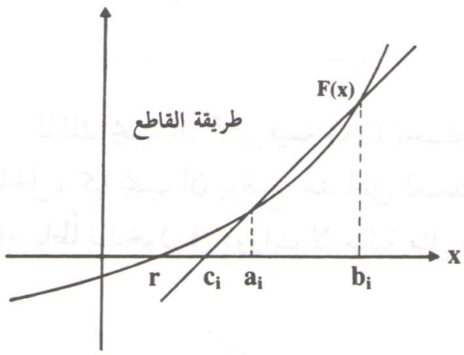
فإن (6.1) تؤول إلى:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{6.2}$$

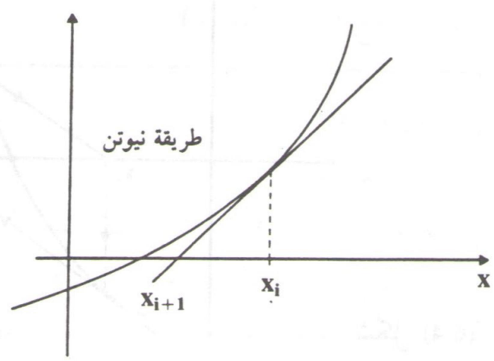
فإن (6.1) تؤول إلى :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (6.2)$$

وهي القاعدة المعروفة باسم طريقة نيوتن. ويمكن توضيح هذه الطريقة بالرسم على النحو المبين في الشكل (6.2) حيث نوجد x_{i+1} من تقاطع المماس مع محور السينات.



شكل (6.1)

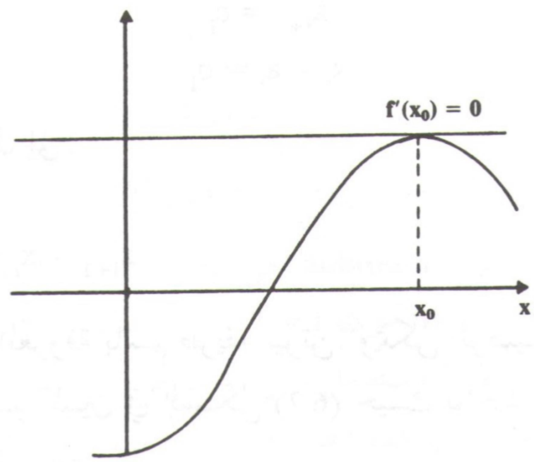


شكل (6.2)

إلّا أن هذه الطريقة قد لا تؤدي إلى الحل المطلوب، وهذا يحدث بالذات إذا كانت:

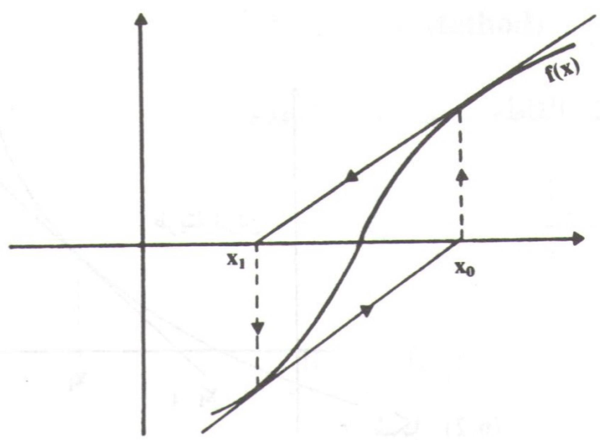
$$f'(x_0) \simeq 0$$

كما هو مبين بالرسم حيث يصبح المماس أفقياً ولا يتقاطع مع محور السينات (شكل 6.3).



شكل (6.3)

لذلك يجب أن تختبر قيمة $f'(x)$ بحيث إذا كانت قريبة من الصفر نتوقف عن الحل، كما يجب أن يوضع حد أعلى لعدد الدورات في برنامج هذه الطريقة، احتياطاً للدخول في دورات لا نهائية مثل الوضع في الشكل (6.4).



شكل (6.4)

ومن المناسب أحياناً أن نستعمل الشرط :

$$|x_{i+1} - x_i| < \delta$$

لإيقاف الدورات بدلاً من (أو مع) الشرط :

$$|f(x_i)| < \varepsilon$$

وذلك لأن :
$$|x_{i+1} - x_i| = \left| \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right|$$

فإذا كانت x_{i+1}, x_i متقاربتين فبالضرورة أن تكون $f(x_i)$ ذات قيمة صغيرة إذا كانت $f'(x_i)$ غير قريبة من الصفر.

والآن يمكن أن نلخص طريقة نيوتن في الخوارزمية التالية:

1 ـ حدد المعطيات: $f(x)$ ، $f'(x)$ ، x_0 (قيمة تقريبية للجذر)، ε و δ (عددان صغيران)، max (الحد الأعلى لعدد الدورات).

2 ـ نفذ الخطوات (3) إلى (7) من $i = 0$ إلى $i = max$.

3 ـ إذا كانت $|f(x_i)| < \varepsilon$ فاطبع $f(x_0), i, x_i$ وتوقف.

4 ـ إذا كانت $|f'(x_0)| < \varepsilon$ فاطبع ما يفيد ذلك وتوقف.

5 ـ أحسب $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

6 ـ إذا كانت: $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ إطبع $f(x_i), i, x_i$ وتوقف.

7 ـ ارجع إلى الخطوة (3).

مثال (6.1) :

حل المعادلة $x^3 + 2e^x = 120$

بطريقة نيوتن. أوقف الدورات عندما $|f(x_i)| < 10^{-4}$

استعمل القيمة الابتدائية $x_0 = 3.5$

دع :

$$f(x) = x^3 + 2e^x - 120$$

إذن :

$$f'(x) = 3x^2 + 2e^x$$

إذن :

$$x_1 = x_0 - f(x_0) / f'(x_0)$$
$$=3.5 - (-10.89) / 102.98$$
$$= 3.605749$$
$$f(x_1) = 0.492847$$
$$x_2 = x_1 - f(x_1) / f'(x_1)$$
$$= 3.601324$$
$$f(x_2) = 0.000909$$
$$x_3 = x_2 - f(x_2) / f'(x_2)$$
$$= 3.601316$$
$$f(x_3) = - 0.000013$$

إذن :

$$|f(x_3)| < 10^{-4}$$

وبالتالي نتوقف عند x_3 كما هو مطلوب، وتعتبر هي الحل التقريبي.

برنامج لطريقة نيوتن

والآن نكتب برنامجاً بلغة فورتران لحل المعادلة:

$$f(x) = 2\cos x - x^2 = 0$$

بطريقة نيوتن، مع أخذ $x_0 = 1$، وإيقاف الدورات إذا تحقق أحد الشرطين:

$$|x_{i+1} - x_i| < 10^{-5} \quad \text{أو} \quad |f(x_i)| < 10^{-6}$$

أو عندما يصل عدد الدورات إلى 20 دورة.

```
c     ....  NEWTON'S METHOD........
            F(X) = 2 * COS (X) - X*X
c..    ...  FD(X) IS DERIVATIVE of F(x)
            FD(X) = - 2 * SIN (X) - 2*X
            A = 1
            MAX = 20
            EPS = 0.000001
            DEL = .00001
            DO 50 I = 1, MAX
                FA = F(A)
                FDA = FD(A)
                IF (ABS (FA) · LT. EPS) GO TO 60
                IF (ABS (DFA). LE. EPS) GO TO 100
                B = A - FA/ FDA
                IF (ABS (B - A) . LT . DEL) GO TO 60
                A = B
50          CONTINUE
60          WRITE (*, 80) A, FA, I
80          FORMAT (1X, 'ROOT = ', E 15.6,
         * 'F (ROOT) = ', E 15.6, 5X, 'ITER =', I3)
           STOP
100        WRITE (*, 120)
120         FORMAT (5x, 'DERIVATIVE IS 'ZERO')
            STOP
            END
```

تطبيقات على طريقة نيوتن

مثال (6.2) :

(إيجاد الجذر التربيعي)

أوجد الجذر التربيعي $\sqrt{a}$ للعدد $a > 0$ بطريقة نيوتن مع التطبيق لإيجاد $\sqrt{2}$.

نوجد الحل للمعادلة $f(x) = x^2 - a = 0$، وبذلك يمكن تبسيط قاعدة نيوتن لهذه الدالة كما يلي :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - a}{2x_i}$$

أي أن:

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + a}{2x_i} \qquad (6.3)$$

وبذلك، فإذا عرفنا الدالة:

$$g(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$$

فإن قاعدة نيوتن تصبح على النحو: $x_{i+1} = g(x_i)$

فمثلاً إذا كانت $a = 2$ وأخذنا القيمة الابتدائية: $x_0 = 1$

فإن:

$$x_1 = g(x_0) = \frac{1 + 2}{2} = 1.5$$

$$x_2 = g(x_1) = \frac{(1.5)^2 + 2}{2(1.5)} = 1.4166667$$

$$x_3 = g(x_2) = 1.4142157$$

$$x_4 = g(x_3) = 1.4142136$$

وبما أن الفرق $|x_4 - x_3| = .0000021$

يعتبر صغيراً نسبياً، فيمكن الاكتفاء بأربع دورات وأخذ x_4 كقيمة تقريبية للجذر $\sqrt{2}$. وإذا أردنا دقة أفضل، نحسب دورات أكثر.

مثال (6.3):

(إيجاد المعكوس الضربي)

أوجد القيمة التقريبية للمعكوس الضربي $\frac{1}{a}$

لأي عدد a لا يساوي صفراً، وذلك بحل المعادلة:

$$f(x) = a - \frac{1}{x} = 0$$

وطبق الطريقة لحساب 1/7، ابتداء من $x_0 = 0.2$

نلاحظ أن:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{a - \frac{1}{x_i}}{\frac{1}{x_i^2}}$$

$$= x_i - ax_i^2 + x_i$$

$$x_{i+1} = x_i (2 - a\, x_i) \qquad (6.4)$$

ومرة أخرى، يمكن وضع طريقة نيوتن على النحو:

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

ولكن الآن: $g(x) = x(2 - ax)$

وعلى سبيل المثال، نضع $a = 7$ (أي أن المطلوب حساب $\frac{1}{7}$)

ولتكن القيمة الابتدائية هي:

$$x_0 = 0.2$$

إذن:

$$x_1 = g(x_0) = 0.2\,(2 - 2(0.2)) = 0.12$$

وهكذا، فإن:

$$x_2 = g(x_1) = 0.1392$$
$$x_3 = g(x_2) = 0.1427635$$
$$x_4 = g(x_3) = 0.1428508$$
$$x_5 = g(x_4) = 0.14285714$$

ومن الواضح أن x_5 لا تختلف كثيراً عن x_4، ويمكن اعتبارها المعكوس للعدد 7.

ملاحظة :

يتبين من القاعدة (6.4) أنه من الناحية النظرية يمكن أن تغني عملية الضرب عن عملية القسمة، ذلك لأن القاعدة (6.4) تفيد بأن عملية القسمـة ما هي إلّا سلسلة من عمليات الضرب تؤول في النهاية إلى ناتج القسمة، فلإيجاد

$$c = a/b = ab^{-1}$$

نوجد المعكوس b^{-1} بواسطة (6.4) ثم نضرب الناتج في a.