المنهج كامل (د.أمل العيادي)

شيت رياضة 2

By: محمد بن نوبه

الشيت الأول

المصفوفات

المصفوفات محاضرة (1)

المصفوفة: هي ترتيبة مستطيلة أو منظومة من الأعداد أو دوال. نرمز للمصفوفات بالحروف الكبيرة أما عناصر المصفوفة نرمز لها بالحروف الصغيرة وعناصرها داخل أقواس [ ] أو ( )

فنكتب المصفوفة على الصورة العامة:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{العمود الأول} & \text{العمود الثاني} & \text{الثالث} & \text{العمود } n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{الصف الأول} \\ \text{الصف الثاني} \\ \text{الثالث} \\ \\ \text{الصف } m \end{array}$$

نرمز للمصفوفة بـ $A = [a_{ij}]$

حيث a_{ij} هو العنصر في الصف i و العمود j من المصفوفة A

$1 \leq i \leq m$ ، $1 \leq j \leq n$

والمصفوفة A نوعها أو حجمها $m \times n$

m عدد الصفوف ، n عدد الأعمدة

المصفوفة المربعة: إذا كان عدد صفوف المصفوفة يساوي عدد الأعمدة نقول أن المصفوفة هي مصفوفة مربعة ويكون نوعها أو حجمها هو $n \times n$ أو $m \times m$.

أمثلة:

$A = [1 \quad 0 \quad 3 \quad 2]$ نوعها أو حجمها 1×4 وعناصرها

$a_{11} = 1$ ، $a_{12} = 0$ ، $a_{13} = 3$ ، $a_{14} = 2$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نوع أو حجم المصفوفة C 3×1

عناصر المصفوفة C

$c_{11} = 1 , \quad c_{21} = -1 , \quad c_{31} = 2$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة B نوعها أو حجمها 3×3 (مصفوفة مربعة)

عناصرها:

$b_{11} = 1 , \quad b_{12} = 0 , \quad b_{13} = 3$

$b_{21} = 2 , \quad b_{22} = -1 , \quad b_{23} = 6$

$b_{31} = -3 , \quad b_{32} = 2 , \quad b_{33} = 5$

$E = [3]$ المصفوفة E حجمها 1×1

إذاً هي مصفوفة مربعة

$e_{11} = 3$

المصفوفة الصفرية :- هي مصفوفة جميع عناصرها أصفار ويرمز بالرمز $O_{m \times n}$ حيث m عدد الصفوف و n عدد الأعمدة

مثال :- $O_{2 \times 3}$ هي مصفوفة عناصرها أصفار وعدد الصفوف 2 وعدد الأعمدة 3.

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

المصفوفات المتساوية :

إذا كان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ من نفس النوع يكونان متساويان إذا كانت العناصر المتناظرة (لها نفس الموقع في المصفوفتين) متساوية

$a_{ij} = b_{ij} , \quad \forall i = 1, \dots, m$

$\forall j = 1, \dots, n$

مثال المصفوفتين $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ متساويتان إذا كان

$a_{11}=b_{11} \longrightarrow 1=a \rightarrow \boxed{a=1}$

$a_{12}=b_{12} \longrightarrow 2=b \quad \boxed{b=2}$

$a_{21}=b_{21} \longrightarrow -3=c \quad \boxed{c=-3}$

$a_{22}=b_{22} \longrightarrow 4=d \quad \boxed{d=4}$

بصورة عامة إذا كان $A=B$

$a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$ ---- $a_{1n}=b_{1n}$

$a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$ ---- $a_{2n}=b_{2n}$

$\vdots$

$a_{m1}=b_{m1}$, $a_{m2}=b_{m2}$, $a_{m3}=b_{m3}$ ------ $a_{mn}=b_{mn}$

المصفوفة المربعة :-

عناصر القطر الرئيسي

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & a_{1n} \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ & & & a_{mn} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \; --- & \end{bmatrix}$$

عناصر القطر الفرعي

مثال للمصفوفات المتساوية .

$$A=\begin{bmatrix} \sin\pi & \cos\frac{\pi}{2} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} , B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

فإن $A=B$

تابع محاضرة (1)

العمليات على المصفوفات

تعريف جمع المصفوفات :

إذا كان $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ من النوع أو حجم $m \times n$ فيكون المجموع $A+B$ هي مصفوفة جديدة $C=[c_{ij}]$ حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ ، $i=1,\dots,m$ ، $j=1,\dots,n$

نجمع العناصر المتشابهة في الموقع

مثال (1) إذا كان مصفوفتين A , B حيث

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} , \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

الجمع معرف

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}=C_{2\times3}$$

مثال (2) أوجد $A+B$ إذا كان ،

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}=$$ غير معرف

لان A و B ليسو من نفس النوع

تعريف : ضرب مصفوفة في عدد حقيقي

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m \times n$ وكان K هو عدد ثابت حقيقي فإن حاصل الضرب KA هو مصفوفة جديدة وهي مثلاً C حيث عناصر C هي $c_{ij}=k\,a_{ij}$ و $C=[c_{ij}]$ من النوع $m \times n$

مثال: إذا كان $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times3}$ فإن

$$3A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 9\\ -3 & 6 & 12\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$-7A=\begin{bmatrix}0 & -7 & -21\\ 7 & -14 & -28\end{bmatrix}_{2\times3}$$

طرح المصفوفات:

إذا كان $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفتين من النوع $m\times n$ (نفس الحجم) فإن حاصل طرح $A-B$ هو مصفوفة جديدة من نفس النوع ويمكن الحصول عليها إما بالطرح المباشر للعناصر المتناظرة أي تقع في الأماكن المتشابهة في المصفوفتين أو بضرب المصفوفة B في (-1) ثم الجمع مع المصفوفة A

مثال: أوجد $A-B$ إذا كان،

$$A=\begin{bmatrix}10 & 1 & -5\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}_{2\times3},\ B=\begin{bmatrix}-9 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}19 & 3 & -9\\ 3 & -4 & 3\end{bmatrix}_{2\times3}$$

ضرب المصفوفات:

إذا كان $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m\times r$ و $B=[b_{ij}]$ مصفوفة من النوع $r\times n$ فإن حاصل الضرب AB هو مصفوفة جديدة $C=[c_{ij}]$ من النوع $m\times n$

$$A_{m\times r}\,B_{r\times n}$$

شرط ضرب المصفوفات

نوع المصفوفة الناتجة

حيث عناصر C هي: $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}\,b_{kj}$$

هو مجموع حاصل ضرب صف في A في عمود من B.

للتوضيح:

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{r} a_{1k}\,b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\dots$$

$$c_{12}=\sum_{k=1}^{r} a_{1k}\,b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\dots$$

$$c_{21}=\sum_{k=1}^{r} a_{2k}\,b_{k1}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+\dots$$

$$c_{22}=\sum_{k=1}^{r} a_{2k}\,b_{k2}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+\dots$$

ملاحظة: شرط ضرب المصفوفات

يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة اليسرى A مساويًا لعدد صفوف المصفوفة اليمنى B، غير ذلك يكون الضرب غير معرف.

مثال ① أوجد AB إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

الحل:

$$A_{2\times 3}, \quad B_{3\times 4}$$

شرط الضرب =

حجم أو نوع المصفوفة الناتجة من الضرب

عناصر حاصل الضرب من تعريف الضرب

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}, \quad r=3, \quad i=1,2, \quad j=1,2,3,4$$

لان من التعريف

$$B_{r\times n}, \quad A_{m\times r}$$

وهنا في المثال عندي

$$B_{3\times 4}, \quad A_{2\times 3}$$

إذن

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}$$

عناصر الصف الأول هي:

$$C_{11}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=(1)(4)+(2)(0)+(4)(2)=4+8=12$$

$$C_{12}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=(1)(1)+(2)(-1)+(4)(7)=27$$

$$C_{13}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k3}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=(1)(4)+(2)(3)+4(5)=30$$

$$C_{14}=\sum_{k=1}^{3} a_{1k}b_{k4}=a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24}+a_{13}b_{34}=(1)(3)+(2)(1)+(4)(2)=13$$

عناصر الصف الثاني هي

$$C_{21} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$C_{21} = (2)(4) + (6)(0) + (0)(2) = 8$$

$$C_{22} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

$$C_{22} = (2)(1) + (6)(-1) + (0)(7) = 2-6 = -4$$

$$C_{23} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k3} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$$

$$C_{23} = (2)(4) + (6)(3) + (0)(5) = 8 + 18 = 26$$

فان المصفوفة الجديدة هي

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & \cancel{14} \end{bmatrix} \to 12$$

$$C_{24} = \sum_{k=1}^{3} a_{2k} b_{k4} = a_{21}b_{14} + a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34}$$

$$C_{24} = (2)(\overset{3}{\cancel{4}}) + (6)(1) + (0)(2) = \overset{6}{\cancel{8}} + 6 = \cancel{14}\ 12$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

8

ملخص الضرب

مثال ② إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

أوجد ① AB ، ② BA.

الحل ①

$\underset{2\times2}{A} \quad \underset{2\times3}{B}$

(=) شرط الضرب متوفر

نوع المصفوفة الناتجة C

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

c_{11} هو مجموع حاصل ضرب عناصر الصف 1 من A في العمود 1 من B

$$C_{11} = (1)(2)+(3)(3) = 2+9 = 11$$

c_{12} هو مجموع حاصل ضرب عناصر الصف 1 من A في العمود 2 من B

$$C_{12} = (1)(0)+(3)(-2) = -6$$

c_{13} هو مجموع حاصل ضرب عناصر الصف 1 من A في العمود 3 من B

$$C_{13} = (1)(-4)+(3)(6) = -4+18 = 14$$

c_{21} هو مجموع حاصل ضرب عناصر الصف 2 من A في عناصر العمود 1 من B

$$C_{21} = (2)(2)+(-1)(3) = 4-3 = 1$$

c_{22} هو مجموع حاصل ضرب عناصر الصف 2 من A في عناصر العمود 2 من B

$$C_{22} = (2)(0)+(-1)(-2) = 2$$

9

C_{23} هو مجموع حاصل ضرب عناصر الصف 2 من A مع عناصر العمود 3 من B

$$C_{23} = (2)(-4) + (-1)(6) = -8 - 6 = -14$$

$$\therefore C = AB = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

② $B_{2\times3} \; A_{2\times2}$

$\neq$

∴ شرط ضرب المصفوفات غير متوفر فإن الضرب غير معرف.

تعريف قسمة المصفوفات :-

إذا كان A, B مصفوفتين فإن حاصل القسمة هو

$$\frac{A}{B} = A * \left(\frac{1}{B}\right) = A * B^{-1}$$

حيث B^{-1} هو المعكوس الضربي للمصفوفة B

سيتم دراسته في المحاضرات القادمة.

ملاحظات على ضرب المصفوفات:

رغم أن عناصر المصفوفات هي أعداد إلا أن هنالك اختلافات بين ضرب المصفوفات وضرب الأعداد.

① قد يكون $AB = 0$ ولكن $A \neq 0$ ، $B \neq 0$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3-3 & 4-4 \\ -6+6 & -8+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

② $AB \neq BA$

مثال: في المثال السابق نوجد BA

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3-8 & -3+8 \\ 3-8 & -3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $AB \neq BA$

③ قد يكون $AE = AD$ ولكن $E \neq D$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad AD = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$$

$AE = AD$ ولكن $E \neq D$

المحاضرة الثانية

الخواص الجبرية للعمليات على المصفوفات

Algebra property for operations on matrices

نظرية: إذا كان A, B و C ثلاث مصفوفات وعناصرها أعداد حقيقية و k ثابت حقيقي (عدد) فإن:

(1) $A+B=B+A$ (عملية الجمع تبديلية)

(2) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (عملية الجمع تنسيقية)

(3) $A(BC)=(AB)C$ عملية تنسيقية مع مراعاة الترتيب

(4) $C(A+B)=CA+CB$ الضرب توزيعي على الجمع

(5) $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

البرهان: باستخدام التعريف العام لجمع وضرب المصفوفات

(1) $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ فإن $A+B=C=[c_{ij}]$

حيث $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

$$c_{ij}=b_{ij}+a_{ij} \Rightarrow C=B+A$$

$$\therefore A+B=B+A$$

(2) واجب

(3) واجب

(4) لتكن $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ حيث $(1\le i\le m, 1\le j\le n)$ و A و B من نفس النوع $(m\times n)$ و $C=[c_{ij}]$ من نوع $r\times m$ $(1\le i\le r, 1\le j\le m)$ ولتكن $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$ ، $C_{r\times m}(A+B)_{m\times n}=D=[d_{ij}]$ نحاول إثبات أن d_{ij} هو عنصر في الصف i والعمود j من $CA+CB$

$$d_{ij} = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_{ik}(a_{kj}+b_{kj})}_{\text{عنصر في } C(A+B)} =$$

من خواص الاعداد نضرب c_{ik} داخل القوس

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_{ik}\, a_{kj}}_{\text{عنصر في } CA} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_{ik} b_{kj}}_{\text{عنصر في } CB}$$

$$\therefore\ d_{ij} \in CA + CB$$

أي أن d_{ij} عنصر أيضاً في $CA+CB$

الإثبات بطريقة أخرى :

أو يمكن الإثبات بأن العناصر المتناظرة في الطرفين متساوية (نأخذ عنصر من $A(B+C)$ ونثبت أنه مساوي للعنصر المناظر له في $AB+AC$)

$$(a(b+c))_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}(b+c)_{kj} = \sum a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik} c_{kj} =$$

$$= (ab)_{ij} + (ac)_{ij}$$ # هـ م ث

نظرية على المصفوفة الصفرية

إذا كانت A أي مصفوفة و O مصفوفة صفرية من نفس نوع A فإن:

(1) $A+O=O+A=A$

(2) $AO=OA=O$

(3) $A-A=O$

نستنتج أن المصفوفة الصفرية هي المحايد الجمعي

البرهان:

نفرض أن $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من النوع $m\times n$ و $O_{m\times n}$ مصفوفة صفرية من النوع $m\times n$ أي أن جميع عناصرها أصفار ونوعها نفس نوع المصفوفة A

(1)

$$a_{ij}+o_{ij}=o_{ij}+a_{ij}=a_{ij}$$

لجميع عناصر المصفوفة A

أي أن حاصل جمع عنصر من A مع العنصر المناظر له في المصفوفة الصفرية O يساوي العنصر نفسه من خواص جمع الأعداد (ولأن الصفر هو المحايد الجمعي)

(2) نفرض أن

$$C=[c_{ij}] \quad , \quad AO=C$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{r} a_{ik}o_{kj}=0$$

إذاً جميع عناصر المصفوفة C أصفار بالتالي $C=O$ (تساوي المصفوفة الصفرية)

وبنفس الطريقة نفرض

$$D=[d_{ij}] \quad , \quad OA=D$$

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{r} o_{ik}a_{kj}=0$$

فإن $D=O$ (تساوي المصفوفة الصفرية)

③ برهان $A-A=O$

من تعريف طرح المصفوفات نطرح العناصر المتناظرة لبعضها من المصفوفتين وبما أن ...

$$A-A=\begin{bmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} & \cdots & a_{1n}-a_{1n} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} & \cdots & a_{2n}-a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}-a_{m1} & a_{m2}-a_{m2} & \cdots & a_{mn}-a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A-A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}=O$$

أو بطريقة مختصرة عناصر $A-A$ هي

$$a_{ij}-a_{ij}=0$$

بالتالي $A-A=O$

تعريف محورة المصفوفة: Transposing

محورة = منقولة = مدور

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة من نوع $m\times n$ فإن $A^t=[a_{ji}]$ هي محورة المصفوفة A من النوع $n\times m$ ناتجة من مبادلة صفوف وأعمدة A ببعض.

أي أن:

$$A^t=[a_{ij}]^t=a_{ji}$$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&-5&6\end{bmatrix}\longrightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&4\\2&-5\\3&6\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}10\\30\end{bmatrix}\longrightarrow B^t=\begin{bmatrix}10&30\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-1&0\\5&3\end{bmatrix}\longrightarrow C^t=\begin{bmatrix}-1&5\\0&3\end{bmatrix}$$

نظرية: Theory

إذا كان A, B مصفوفتين و K عدد ثابت فإن:

(1) $(A+B)^t=A^t+B^t$

(2) $(AB)^t=B^tA^t$ بشرط ان يكون AB معرف

ضرب A في B

(3) $(A^t)^t=A$

(4) $(KA)^t=KA^t$

البرهان:

(1) إذا كانت $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $A+B=C=[c_{ij}]$

$$(A+B)^t = C^t = [c_{ij}]^t = [c^t_{ij}] = [c_{ji}] = [a_{ji}]+[b_{ji}]$$

$$= [a_{ij}]^t + [b_{ij}]^t = A^t + B^t$$

(2) إذا كان $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ مصفوفتين من النوعين $m\times r$ و $r\times n$ على الترتيب (أي أن $A_{m\times r}$ $B_{r\times n}$) فإن حاصل الضرب AB معرف ويكون

$$AB = C = [c_{ij}]$$

يكفي أن نثبت أن c^t_{ij} عنصر في المصفوفة $(AB)^t$ موجود في $B^t A^t$ وبالتالي يكون $(AB)^t = B^t A^t$

من تعريف الضرب

$$c^t_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{r} a^t_{kj} b^t_{ik}$$

من تعريف المنقولة

$$= \sum_{k=1}^{r} b^t_{ik} a^t_{kj}$$

ضرب الأعداد تبديلي

$$\therefore c^t_{ij} \in B^t A^t$$

هـ.م.ث #

$$(AB)^t = B^t A^t$$

$(AB)^t = B^t A^t$

من ①, ② نلاحظ أن $(AB)^t \neq A^t B^t$

ملاحظة Note

مثال: إذا كان $K=-1$, $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ ①

أوجد A^t , $(A^t)^t$, KA , KA^t , $(KA)^t$

الحل

$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow (A^t)^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$ ②

من ①, ② $((A^t)^t = A)$ Note

$KA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & -4 \\ -3 & -5 & -9 \end{bmatrix}$, $KA^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -7 & -5 \\ -3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$ ③

$(KA)^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & -7 & -5 \\ -3 & -4 & -9 \end{bmatrix}$ ④

من ③, ④ $((KA)^t = KA^t)$ Note

أنواع خاصة من المصفوفات المربعة

Special Types of square Matrices

1- المصفوفة القطرية:

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة حيث $a_{ij}=0$ لكل $i\neq j$ $(i,j=1,2,\dots n)$ فتسمى A مصفوفة قطرية وتكتب

عناصر القطر الرئيسي ≠ أصفار

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{ii}\neq 0$ لكل $i=j$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix},\ C=[-2]$$

A, B, C مصفوفات قطرية

مبرهنة:

إذا كانت A,B قطريتين من نفس النوع $m\times n$ فإن

1- $A+B$ قطرية

2- $AB=BA$

3- AB, BA قطريتين

مصفوفة الوحدة :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة حيث $a_{ij}=0$ لكل $i\neq j$, $a_{ii}=1$ فإن A تسمى مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I_n أو I حيث $n\times n$ حجمها أو نوعها

Note مصفوفة الوحدة لها الخاصية :

$$AI_n = I_nA = A$$

حيث A أي مصفوفة من النوع $n\times n$.

Note أي أن مصفوفة الوحدة هي المحايد الضربي للمصفوفات .

مثال :

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad I_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\qquad I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$AI=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A,\quad IA=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=A$$

Note إذا كانت A مصفوفة $n\times k$ فإن :

+ العبارة $IA=A$ تدل على أن $I=I_n$ وإلا لا تجوز عملية الضرب (غير ذلك الضرب غير معرف)

+ بينما المعادلة $AI=A$ تدل على أن $I=I_k$ غير ذلك فإن الضرب غير معرف .

$$I_{n\times n}A_{n\times k}=A_{n\times k}\quad,\quad A_{n\times k}I_{k\times k}=A_{n\times k}$$

(=) شرط الضرب

نوع المصفوفة الناتجة من الضرب

المصفوفة المثلثية:-

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة وكان:-

(1) $a_{ij}=0$ لكل $i>j$ فإن A مصفوفة مثلثية علوية
أي إذا كان جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار فتسمى مصفوفة مثلثية علوية.

(2) $a_{ij}=0$ لكل $i<j$ فإن A مصفوفة مثلثية سفلية
أي إذا كان جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار فتسمى مصفوفة A مثلثية سفلية.

a_{ij} و $i>j$ العناصر تحت القطر الرئيسي

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} و $i<j$ العناصر فوق القطر الرئيسي

مثال:-

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية علوية

$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية سفلية

Note:- في المصفوفات:- القطرية والمثلثية العلوية والسفلية قد يكون بعض عناصر القطر الرئيسي أصفار.

المصفوفة المتماثلة:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان $A^t = A$ فنسمي A مصفوفة متماثلة (متماثلة حول القطر الرئيسي $a_{ij} = a_{ji}$)

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$ A مصفوفة متماثلة

لأن

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} = A$$

المصفوفة ملتوية التماثل:

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكان $A^t = -A$ فنسمي A مصفوفة ملتوية التماثل $(a_{ij} = -a_{ji})$

عناصر القطر الرئيسي أصفار

مثال:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ مصفوفة ملتوية التماثل

لأن:

$$B^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -B$$

المصفوفة المتعامدة:

إذا كانت M مصفوفة مربعة وكان $MM^t = M^tM = I$ فنسمي M مصفوفة متعامدة

الشرط

$$MM^t = M^tM = I$$

يعني أن M^t هو المعكوس الضربي لـ M

$\boxed{M^t = M^{-1}}$ ← فإن M متعامدة

مثال: $M=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة ومتماثلة

لأن

$$M^t=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{bmatrix}=M$$ (شرط التماثل)

$$MM^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$ (شرط التعامد)

مثال: $M=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ مصفوفة متعامدة

لأن

$$M^t=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

$$MM^t=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta & +\sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

محاضرة (3)

(الصورة الدرجية)

المصفوفة المتدرجة :-

إذا كانت المصفوفة تكون في شكل صف متدرج

(1) الصفوف غير الصفرية تسبق الصفوف الصفرية

الصفوف الصفرية تجمع معاً في أسفل المصفوفة.

أي الصفوف الصفرية في صف يكون على يمين أول

(2) أول عنصر غير صفري في صف يكون على يمين أول عنصر غير صفري في الصف الذي يسبقه.

المصفوفة المختزلة صفياً :-

إذا كانت المصفوفة درجية (أي يتوفر الشرطان (1) و(2))

ويتوفر فيها الشرط الآتي :-

(3) العنصر غير الصفري الأول في كل صف غير صفري مساوياً 1 وبقية العناصر في عموده صفرية.

أي بمعنى عندما يكون الصف غير مكون بكامله من أصفار فيكون العدد 1 هو العنصر الأول غير الصفري في الصف ويسمى الواحد المتقدم لذلك الصف.

فنقول بأن المصفوفة مختزلة صفياً

مثال

مثال:-

صور درجية لمصفوفات غير صفرية من النوع 2×2 هي

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \ a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{R}$$

صور درجية لمصفوفات غير صفرية من النوع 3×3 هي

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & a_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ بينما b_1, b_2, b_3 تأخذ جميع القيم اصفار وغير اصفار.

مثال:-

الصورة المختزلة للمصفوفات غير الصفرية من النوع 2x2 هي

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = I \quad , \quad \begin{bmatrix}1&b_1\\0&0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} \rightarrow Rank=1$$

صور مختزلة للمصفوفات غير الصفرية من النوع 3x3 هي

$$I = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}1&0&b_1\\0&1&b_2\\0&0&0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}1&b_1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow Rank=2$$

$$\begin{bmatrix}1&b_1&b_2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} , \begin{bmatrix}0&1&b_1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

حيث $a_1 \neq 0 , a_2 \neq 0$ بينما b_1 , b_2 , b_3 تأخذ جميع القيم أصفار وغير أصفار.

رتبة المصفوفة:-

عدد الصفوف غير الصفرية للصورة الدرجية أو المختزلة لمصفوفة A يسمى رتبة المصفوفة Rank ويرمز له بالرمز Rank(A).

العمليات الصفية الأولية :-

ندرس ثلاث عمليات تجرى على صفوف المصفوفة وهي تسمى العمليات الصفية الاولية او الابتدائية

1. تبديل صفين. ويرمز لتبديل الصف رقم i بالصف رقم j بالرمز

$R_i \longleftrightarrow R_j$ أو $r_i \longleftrightarrow r_j$

2. ضرب صف في عدد غير صفري. ونرمز لضرب صف i في عدد ثابت $c \neq 0$ بالرمز $r_i \to cr_i$ أو $R_i \to cR_i$

3. إضافة مضروب صف في عدد غير صفري الى صف آخر. ونرمز لاضافة مضروب الصف r_k (R_k) في العدد λ إلى الصف r_j (R_j) بالرمز :- $r_j \longrightarrow r_j + \lambda r_k$

أو

$$R_j \longrightarrow R_j + \lambda R_k$$

أي استبدال الصف r_j (R_j) بحاصل جمع الصف r_k (R_k) مضروبًا بالعدد λ مع الصف r_j (R_j)

استخدامات العمليات الصفية الأولية :-

العمليات الصفية الاولية مهمة جدًا تساعد على

1. الحصول على المصفوفة الدرجية
2. الحصول على المصفوفة المختزلة
3. إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفات (إن وجد)

ملاحظة:- ((تعريف المصفوفات المتكافئة)):-

عند إجراء عمليات أولية على مصفوفة M وكان الناتج مصفوفة D فنقول أن M تكافئ D صفياً أو D تكافئ M صفياً.

مثال:-

المصفوفة $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ تكافئ صفياً المصفوفة

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

لأن:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to 2r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix} = D$$

بإجراء عمليات أولية صفية على M نحصل على D.
بالتالي فإن M تكافئ صفياً D.

ملاحظة: يمكن تغيير اي مصفوفة إلى الشكل الدرجي أو المختزل بواسطة متتالية من العمليات الصفية الأولية. ونرمز للمصفوفة المختزلة بالرمز A_R أو B_R أو D_R أو M_R أو ....

الصورة المختزلة لأي مصفوفة وحيدة.

بينما الصورة الدرجية لأي مصفوفة قد لا تكون وحيدة.

مثال: أوجد الصورة الدرجية والمختزلة للمصفوفة

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -4 & -8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \to 3r_1]{r_2 \to -2r_2} \begin{bmatrix} 6 & 12 & -3 \\ -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M$$

M وهي الصورة الدرجية للمصفوفة D فبالتالي رتبة D هي 2.

$$Rank(D) = 2$$

أما الصورة المختزلة نحصل عليها بإجراء العمليات الصفية الأولية لجعل العنصر المتقدم في الصفوف الغير صفرية هو الواحد وباقي عناصر نفس العمود أصفار على المصفوفة الدرجية.

$$M=\begin{bmatrix}6 & 12 & -3\\ 0 & 10 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\to -6r_2]{r_1\to 5r_1}\begin{bmatrix}30 & 60 & -15\\ 0 & -60 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\to r_1+r_2}\begin{bmatrix}30 & 0 & -9\\ 0 & -60 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\to -\frac{1}{60}r_2]{r_1\to \frac{1}{30}r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{3}{10}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{10}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=D_R$$

مثال: أوجد صورة درجية للمصفوفة M والرتبة والصورة المختزلة الوحيد M_R.

$$M=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3+r_1}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\to r_1-r_2]{r_3\to r_3-r_2}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

هذه صورة درجية [وهي تختلف حسب العمليات الصفية الأولية]

$\therefore \text{Rank}(M)=3$

الآن نوجد الصورة المختزلة (وهي وحيدة)

$$\xrightarrow[r_3\to \frac{1}{3}r_3]{r_1\to -\frac{1}{2}r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_1\to r_1+r_3]{r_2\to r_2-r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=M_R$$

الصورة المختزلة لـ M

الشيت الثاني

المحددات

المحددات

تعريف المحدد:

إذا كانت $M=[m_{ij}]$ مصفوفة مربعة حجمها $n\times n$

فنرمز لمحدد المصفوفة بالرمز $|M|$ أو $\det M$

ويعرف

$$|M| = \sum (\pm)\, m_{1j_1}\, m_{2j_2} \cdots m_{nj_n}$$

1. إذا كانت $M=[m_{11}]$ من النوع 1×1 فإن $|M| = a_{11}$

مثال: $M=[-9]$ فإن $|M| = -9$

2. إذا كانت $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$ من النوع 2×2 فإن:

$|M| =$ حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي

$$|M| = m_{11} m_{22} - m_{21} m_{12}$$

مثال: $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ فإن $|M| = (1)(4) - (3)(2) = -2$

3. إذا كانت $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$ من النوع 3×3 فإن:

محدد المصفوفة M يمكن الحصول عليه إما بالطريقة البدائية طريقة الاسهم أو بطريقة الفك باستخدام صف أو عمود.

طريقة الاسهم :-

$$\begin{array}{ccccc}
\textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & \textcircled{6} \\
(+) & (+) & (+) & (-) & (-) & (-) \\
m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{11} & m_{12} \\
m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{21} & m_{22} \\
m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{31} & m_{32}
\end{array}$$

$$|M| = m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32}$$
$$- m_{13}m_{22}m_{31} - m_{11}m_{23}m_{32} - m_{12}m_{21}m_{33}$$

طريقة الفك :-

الفك باستخدام الصف الاول مثلاً =

$$\begin{array}{cccc}
+ & - & + & \\
\end{array}$$
$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \leftarrow \text{الصف الاول}$$

المحدد المرافق لـ m_{11} المحدد المرافق لـ m_{12} المحدد المرافق لـ m_{13}

$$|M| = m_{11}\boxed{\begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}} - m_{12}\boxed{\begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix}} + m_{13}\boxed{\begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{vmatrix}}.$$

$$= m_{11}(m_{22}m_{33} - m_{32}m_{23}) - m_{12}(m_{21}m_{33} - m_{31}m_{23}) +$$
$$+ m_{13}(m_{21}m_{32} - m_{31}m_{22}).$$

ملاحظة :-

المحدد المرافق لـ m_{ij} ينتج من المصفوفة الاصلية بإلغاء الصف i أو العمود j.

الفك باستخدام العمود الثاني مثلاً :-

$$
\begin{array}{cccc}
 & & \text{العمود الثاني} & \\
 & & \downarrow & \\
M = & \left[\begin{array}{ccc} \overset{+}{m}_{11} & \overset{-}{m}_{12} & \overset{+}{m}_{13} \\ \overset{-}{m}_{21} & \overset{+}{m}_{22} & \overset{-}{m}_{23} \\ \overset{+}{m}_{31} & \overset{-}{m}_{32} & \overset{+}{m}_{33} \end{array}\right] & &
\end{array}
$$

المحدد المرافق لـ m_{12} — المحدد المرافق لـ m_{22} — المحدد المرافق لـ m_{32}

$$|M| = -m_{12}\begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} + m_{22}\begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{31} & m_{33} \end{vmatrix} - m_{32}\begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} \\ m_{21} & m_{23} \end{vmatrix}$$

مثال :-

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد محدد A ($\det A$).

الحل :-

يمكن الحل بثلاثة طرق :-

1- الفك باستخدام طريقة الاسهم.

2- الفك باستخدام صف (الصف إختياري) مع مراعاة الإشارات

3- الفك باستخدام عمود (العمود إختياري) مع مراعاة الإشارات.

يفضل استخدام الطريقة الفك باستخدام صف أو عمود لانها اقل عمليات حسابية. يفضل إختيار الصف أو العمود الذي يحتوي على أكبر عدد من الاصفار.

نحل بالفك باستخدام الصف الثاني

$$A = \begin{bmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{1} & \overset{+}{-5} \\ \overset{-}{1} & \overset{+}{1} & \overset{-}{-2} \\ \overset{+}{2} & \overset{-}{0} & \overset{+}{1} \end{bmatrix} \leftarrow \text{الصف الثاني}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{الصف الثاني}$$

$$|A| = -(1)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -[1-0] + [2+10] + 2[0-2] = -1+12-4 = 7$$

طريقة اخرى بالفك باستخدام العمود الثالث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-5)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-5)[0-2] + 2[0-2] + [2-1]$$

$$= (-5)(-2) + 2(-2) + 1$$

$$= 10 - 4 + 1 = 10 - 3 = 7$$

خواص المحددات :

1. إذا كانت A مصفوفة مربعة و A^t محورتها فإن

$$|A| = |A^t|$$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)(4) - (3)(2) = 4 - 6$$

$$|A| = -2$$

$$|A^t| = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6$$

$$|A^t| = -2$$

$$\therefore |A| = |A^t|$$

2. إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة مثلثية أو قطرية فإن محددها هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn}$$

مثال :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)(3)(7) = 21$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(-5)(6) = 30$$

3. إذا كانت B مصفوفة ناتجة من:
a. إبدال صفين من A فإن $|B| = -|A|$
b. إضافة مضاعف صف من A لصف آخر منها فإن
$|B| = |A|$
c. ضرب صف من A في عدد حقيقي c فإن
$|B| = c^n|A|$ n نوع المصفوفة

ملاحظة: نستخدم خواص المحددات لإيجاد قيمة المحدد بطريقة أسرع

مثال: احسب $|A|$ بدون فك المحدد إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:
الطريقة الأولى:

من الخاصية 3-a
$$|A| = -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

من الخاصية 3-c
$$|A| = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

من الخاصية 3-b
$(r_3 \to -2r_1 + r_3)$
$$|A| = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

من الخاصية b-3
($r_3 \to -10r_2 + r_3$)

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

من الخاصية c-3

$$|A| = (-3)(-55)(1)(1)(1)$$
$$= 165$$

الطريقة الثانية :-

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

(خاصية b-3
$r_2 \to r_2 + r_3$)

(خاصية a-3
$r_2 \leftrightarrow r_3$)

$$= (-1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(خاصية a-3
$r_1 \leftrightarrow r_2$)

(خاصية c-3)

$$= (5)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

(خاصية a-3
$r_1 \leftrightarrow r_3$)

(خاصية b-3
$r_3 \to -2r_1 + r_3$)

$$= (-5)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = (-5)(1)(1)(-33) = 165$$

(خاصية b-3
$r_3 \to -6r_2 + r_3$)

(محدد المصفوفة المثلثية العلوية يساوي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي)

$\therefore |A| = 165$

مثال :- إذا كانت $|A| = -8$ أوجد $|B|, |C|, |D|$ الناتجة من العمليات الأولية الآتية على A :-

$$A \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} B \xrightarrow{r_3 \to 2r_3} C \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 5r_3} D$$

الحل :- $|B| = -|A| = -(-8) = 8$ من خاصية a-3

$|C| = 2|B| = 2(8) = 16$ من خاصية c-3

$|D| = |C| = 16$ من خاصية b-3

تابع خواص المحددات :-

4 إذا كانت A بها صف أو عمود من الأصفار فإن $|A|=0$

مثال :- نوجد المحدد بالفك باستخدام الصف الأول أو الصف الصفري

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -7 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} + (3)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

5 إذا كانت A تحتوي على صفين (عمودين) متساويين فإن $|A|=0$.

مثال :-

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-15) - 3(4-10) + 4(3)$$

$$= -30 + 18 + 12 = -30 + 30 = 0$$

6 إذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة يساوي مضروب آخر في عدد .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -2r_1 + r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \text{صفر}$$

المصفوفات غير الشاذة

تعريف :- المصفوفة المربعة M تسمى مصفوفة غير شاذة (قابلة للانعكاس) إذا وجدت مصفوفة D بحيث $DM = MD = I$ حيث I مصفوفة الوحدة وتسمى D معكوس M ويرمز لها بالرمز M^{-1} .

إذا لم يوجد M^{-1} فإن M هي مصفوفة شاذة (غير قابلة للانعكاس).

نظرية :- معكوس المصفوفة إن وجد يكون وحيد.

البرهان :- واجب

مثال :-

المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة عكسية للمصفوفة $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

لأن

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

نظرية :-

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :-

A غير شاذة (يوجد لها معكوس) $\longleftrightarrow |A| \neq 0$

حساب معكوس مصفوفة مربعة:

نظرية:
إذا كانت A مصفوفة من النوع $n\times n$ فإن A مصفوفة غير شاذة (يوجد لها معكوس) إذا وإذا كان فقط A تكافئ صفياً مصفوفة الوحدة I_n.

مفهوم النظرية:
نأخذ المصفوفة الموسعة $[A|I_n]$ ونجري عليها عمليات متتالية صفية أولية لغرض الحصول على الصورة المختزلة لـ A أي للحصول على A_R بدلاً من A و نحصل على مصفوفة جديدة بدلاً من I_n يمكن تسميتها مصفوفة E ونجدها أي أن E ستكون معكوس ضربي لـ A.

$$EA = I_n$$

$$[A|I] \xrightarrow[\text{صفية متتالية}]{\text{بإجراء عمليات}} [A_R|E]$$

ⓐ إذا كان $A_R = I$ فإن $EA = I$ وبالتالي $E = A^{-1}$

ⓑ إذا كان $A_R \neq I$ فإن A مصفوفة شاذة (لا يوجد لها معكوس)

مثال: أوجد A^{-1} للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -3r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \to -2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] = [A_R | E] , \quad A_R = I \Rightarrow E = A^{-1}$$

ويمكن التحقق من أن E هو معكوس A بالضرب $EA = AE = I$

واجب

مثال: أوجد A^{-1} لـ إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 4\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$

الحل: باستخدام العمليات الصفية الأولية على المصفوفة الموسعة $[A|I]$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to -3r_1+r_3]{r_2 \to -2r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 7 & -3 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to -2r_2+r_1]{r_3 \to -r_2+r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -13 & 5 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to 13r_3+r_1]{r_2 \to -6r_3+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -8 & -15 & 13\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right] = [A_R|E]$$

نلاحظ أن $A_R=I$ فإن $E=A^{-1}$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}-8 & -15 & 13\\ 4 & 7 & -6\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

نظرية :-
إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن :-

A غير شاذة (يوجد لها معكوس) $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

مثال :- أثبت أن المصفوفة الآتية غير شاذة ثم أوجد معكوسها

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :-
المصفوفة غير شاذة إذا كان محددها $\neq 0$
نوجد محدد B بالفك باستخدام الصف الثالث

$$|B| = 2\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2[-2+5] + 0 + [2-1] = 2(3)+1 = 7 \neq$$ صفر

$\therefore$ B مصفوفة غير شاذة ويوجد لها معكوس
يمكن إيجاد معكوس باستخدام العمليات الصفية على المصفوفة الموسعة $[B|I]$

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to -r_1 + r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -2r_1 + r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to -r_2 + r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to -r_2 + r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3/7}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \to -r_3 + r_2]{r_1 \to 3r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{7}+1 & \frac{6}{7}-1 & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7}-1 & -\frac{2}{7}+2 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right]$$

نحصل على :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -5/7 & 12/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2/7 & 2/7 & 1/7 \end{array}\right] = [B_R | E]$$

نلاحظ أن $B_R = I$ فإن $E = B^{-1}$

للتحقق

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & 3/7 \\ -5/7 & 12/7 & -1/7 \\ -2/7 & 2/7 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{7}-\frac{5}{7}+\frac{10}{7} & -\frac{2}{7}+\frac{12}{7}-\frac{10}{7} & \frac{6}{7}-\frac{1}{7}-\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7}-\frac{5}{7}+\frac{4}{7} & -\frac{1}{7}+\frac{12}{7}-\frac{4}{7} & \frac{3}{7}-\frac{1}{7}-\frac{2}{7} \\ \frac{2}{7}-\frac{2}{7} & -\frac{2}{7}+\frac{2}{7} & \frac{6}{7}+\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{7} & \frac{12-12}{7} & \frac{6-6}{7} \\ \frac{5-5}{7} & \frac{7}{7} & \frac{3-3}{7} \\ \frac{2-2}{7} & \frac{2-2}{7} & \frac{7}{7} \end{bmatrix}$$

$$BB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \#$$

حساب A^{-1} باستخدام المحددات

تعريف: إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة $n\times n$ وكانت A_{ij} مصفوفة جزئية $(n-1)\times(n-1)$ المتحصل عليها من A بعد حذف الصف i والعمود j فإن $|A_{ij}|$ يسمى المتمم للعنصر a_{ij} في A ويعرف المتمم المميز C_{ij} للعنصر a_{ij} كالتالي:

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\,|A_{ij}|$$

مثال:

إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

(1) نوجد المتممات لعناصر المصفوفة A وهي:

$|A_{11}|$ ، $|A_{12}|$ ، $|A_{13}|$ ، $|A_{21}|$ ، $|A_{22}|$ ، $|A_{23}|$

$|A_{31}|$ ، $|A_{32}|$ ، $|A_{33}|$

(2) نوجد المتممات المميزة للعناصر المصفوفة A.

الحل:

(1)

$$|A_{11}|=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 4 & 8\end{vmatrix}=40-24=16$$

$$|A_{12}|=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 1 & 8\end{vmatrix}=16-6=10$$

$$|A_{13}|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=8-5=3$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 16 = 24$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 24 + 4 = 28$$

$$|A_{23}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 20 = 26$$

$$|A_{32}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 8 = 26$$

$$|A_{33}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13$$

(2) المتممات المميزة

$C_{11} = (-1)^{1+1} |A_{11}| = (1)(16) = 16$ سالب واحد أسه عدد زوجي = +1

$(-1)^{\text{عدد زوجي}} = 1$

$C_{12} = (-1)^{1+2} |A_{12}| = (-1)(10) = -10$

$(-1)^{\text{عدد فردي}} = -1$

$C_{13} = (-1)^{1+3} |A_{13}| = (1)(3) = 3$

سالب واحد أسه عدد فردي = -1

$C_{21} = (-1)^{2+1} |A_{21}| = (-1)(24) = -24$

$C_{22} = (-1)^{2+2} |A_{22}| = (1)(28) = 28$

$C_{23} = (-1)^{2+3} |A_{23}| = (-1)(11) = -11$

$$C_{31}=(-1)^{3+1}|A_{31}|=(1)(26)=26$$

$$C_{32}=(-1)^{3+2}|A_{32}|=(-1)(26)=-26$$

$$C_{33}=(-1)^{3+3}|A_{33}|=(1)(13)=13$$

ملاحظة: عندما استخدمنا طريقة الفك باستخدام صف أو عمود لإيجاد محدد مصفوفة ما فإن هذه الطريقة في حقيقة الأمر هي طريقة استخدام المتممات المميزة لإيجاد المحدد تسمى بـ ((فك لابلاس))

ويمكن التعبير عنها:

بالفك حول العمود j :

$$|A|=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

بالفك حول الصف i :

$$|A|=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, C_{ij}$$

حيث

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

مثال: أوجد $|A|$ باستخدام فك لابلاس

حيث

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

نوجد $|A|$ بالفك باستخدام العمود الاول :- $(j=1)$

$$|A| = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}(-1)^{i+1}|A_{i1}| = a_{11}(-1)^{1+1}|A_{11}| + a_{21}(-1)^{2+1}|A_{21}| + a_{31}(-1)^{3+1}|A_{31}|.$$

$$= 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5[4-14] - 3[8+7] + 2[4+1]$$

$$= 5[-10] - 3[15] + 2[5]$$

$$= -50 - 45 + 10 = -95 + 10 = -85$$

نوجد $|A|$ بالفك باستخدام الصف الثاني :- $(i=2)$

$$|A| = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}(-1)^{2+j}|A_{2j}|$$

$$= a_{21}(-1)^{2+1}|A_{21}| + a_{22}(-1)^{2+2}|A_{22}| + a_{23}(-1)^{2+3}|A_{23}|$$

$$= 3(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 1(+1)\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (2)(-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -3[8+7] + [20+2] - 2[35-4]$$

$$= -3[15] + 22 - 2[31] = -45 + 22 - 62 = -85.$$

ملاحظات:

1. من الأفضل فك المحدد حول الصف أو العمود الذي به أكبر عدد من الأصفار لأنه في هذه الحالة المتممات المميزة $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ للعناصر a_{ij} التي تساوي صفراً ليس بالضرورة حسابها لأنها مضروبة في الصفر

2. بما أن $C_{ij}=\pm|A_{ij}|$ فإنه لسرعة تحديد الإشارة (+) أو (−) تكون في الترتيب :-

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

مثال:

أوجد قيمة المحدد :-

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

الصف الثالث يحتوي على أكبر عدد من الأصفار

الحل :- نوجد قيمة المحدد بالفك أي باستخدام المتممات المميزة وذلك باستخدام الصف الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار وهو الصف الثالث

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} + 0\,|\quad| + 0\,|\quad| - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

بالفك مرة أخرى المحددات التي تحصلنا عليها (المتممات)

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

نفك باستخدام الصف الثالث أو العمود الأول

نفك باستخدام العمود الثاني أو الصف الثالث

باقي الحل واجب قيمة المحدد = صفر

تعريف: إذا كانت $A = [a_{ij}]$ مصفوفة $n \times n$ فإن المصفوفة المرتبطة بالمصفوفة A يرمز لها $adj\,A$ تعرف كالتالي:

$$adj\,A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ & \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & & C_{nn} \end{bmatrix}^t$$

حيث $C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ المتمم المميز للعنصر a_{ij}

مثال: إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

أوجد $adjA$.

الحل:

$$adjA=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t \quad ; \quad C_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$$

$$C_{11}=+|A_{11}|=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=0+12=12$$

$$C_{12}=-|A_{12}|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-(-6)=6$$

$$C_{13}=+|A_{13}|=\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-4-12=-16$$

$$C_{21}=-|A_{21}|=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}=-(-4)=4$$

$$C_{22}=+|A_{22}|=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2$$

$$C_{23}=-|A_{23}|=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}=-(-12-4)=16$$

$$C_{31}=+|A_{31}|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}=6+6=12$$

$C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9+1) = -10$

$C_{33} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18-2 = 16$

لذلك :-

$$adj\,A = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

نظرية :-

إذا كان A مصفوفة nxn وكان $|A| \neq 0$ فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj\,A$$

مثال :- إذا كانت

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أوجد :-

① $|B|$ ② $adj\,B$ ③ B^{-1}

الحل :-

① $|B| = (4)(-3)(2) = -24$ لأن B مصفوفة قطرية

②
$$adj\,B = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj } B = \frac{1}{-24} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

نتيجة :- من هنا المثال يمكن إستنتاج أن معكوس أي مصفوفة قطرية هي مصفوفة قطرية أخرى عناصر القطر الرئيسي هم المعكوس الضربي لعناصر القطر الرئيسي للمصفوفة الاصلية.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_{33} \end{bmatrix}$$

مثال آخر: أثبت أن المصفوفة الآتية غير شاذة وأوجد معكوسها

$$M = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$|M| = |C| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(20-2)$$

$$= -18$$

$r_1 \longrightarrow r_1 - r_2$

بالفك باستخدام العمود الثالث

$|M| \neq 0$ فإن M قابلة للانعكاس أي يوجد M^{-1}

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \, adj\, M$$

$$adj\, M = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$adj\, M = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 14 \\ 4 & -1 & -32 \\ 2 & -5 & -16 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 14 & -32 & -16 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \operatorname{adj} M = \frac{1}{-18} \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & -5 \\ 14 & -32 & -16 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :- يمكن إيجاد A^{-1} بالعنصر الواحد من الصيغة

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|} M_{ji}$$

حيث M_{ji} هو المحدد الناتج عند الغاء الصف j والعمود i في المثال السابق

$$A^{-1}_{11} = \frac{(-1)^{1+1}}{|A|} M_{11} = \frac{+1}{-18} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-4}{-18} = \frac{4}{18}$$

$$A^{-1}_{21} = \frac{(-1)^{1+2}}{|A|} M_{12} = \frac{-1}{-18} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}(-1) = \frac{-1}{18}$$

$$A^{-1}_{31} = \frac{(-1)^{1+3}}{|A|} M_{13} = \frac{1}{-18} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{14}{-18}$$

$$A^{-1}_{32} = \frac{(-1)^{2+3}}{|A|} M_{23} = \frac{-1}{-18} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{32}{18}$$

$$A^{-1}_{33} = \frac{(-1)^{3+3}}{|A|} M_{33} = \frac{1}{-18} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \frac{-16}{-18}$$

$$A^{-1}_{12} = \frac{(-1)^{2+1}}{|A|} M_{21} = \frac{-1}{-18} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-4}{18}$$

$$A^{-1}_{22} = \frac{(-1)^{2+2}}{|A|} M_{22} = \frac{1}{-18} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18}$$

$$A^{-1}_{13} = \frac{(-1)^{3+1}}{|A|} M_{31} = \frac{1}{-18} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{-18}$$

$$A^{-1}_{23} = \frac{(-1)^{3+2}}{|A|} M_{32} = \frac{-1}{-18} \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{18}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/18 & \frac{-4}{18} & \frac{2}{-18} \\ \frac{-1}{18} & 1/18 & 5/18 \\ \frac{14}{-18} & 32/18 & \frac{-16}{-18} \end{bmatrix}$$

نظرية:
إذا كان A, B مصفوفتين غير شاذتين ومن نفس النوع فإن

a) AB مصفوفة غير شاذة

b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

مثال: واجب Homework

إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$

1. أوجد حاصل الضرب AB وأثبت أن AB مصفوفة غير شاذة.
2. أوجد معكوس المصفوفة AB.
3. أوجد A^{-1} و B^{-1} وحاصل الضرب $B^{-1}A^{-1}$
4. أثبت أن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. أوجد A^t, $(A^t)^{-1}$, و $(A^{-1})^t$ وتحقق من أن $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
6. أوجد B^t, $(B^t)^{-1}$, و $(B^{-1})^t$ وتحقق من أن $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$

نظرية :-

إذا كانت A مصفوفة غير شاذة فإن :-

a. A^{-1} غير شاذة ، $(A^{-1})^{-1}=A$

b. aA غير شاذة ومعكوسها هو $\frac{1}{a}A^{-1}$; $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

a عدد ثابت غير صفري

$$(aA)^{-1}=\frac{1}{a}A^{-1}$$

c. A^n غير شاذة ، $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$

حيث $n=0,1,2,\dots$

وحيث

$$A^n=\underbrace{A.A.\cdots.A}_{\text{A مضروبة في نفسها n من المرات}} \quad , \quad A^0=I$$

مثال :- إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&7\end{bmatrix}$ أوجد A^{-1} , $(A^{-1})^{-1}$

الحل :- تمّ إيجاد معكوس A في الصفحات السابقة وهو

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}7&-2\\-3&1\end{bmatrix}$$

الان نوجد $(A^{-1})^{-1}$ باستخدام المصفوفة الموسعة

$$[A^{-1}|I]=\left[\begin{array}{cc|cc}7&-2&1&0\\-3&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\to r_1/7}\left[\begin{array}{cc|cc}1&-\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&0\\-3&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\to 3r_1+r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1&-\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&0\\0&-\frac{6}{7}+1&\frac{3}{7}&1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}1&-\frac{2}{7}&\frac{1}{7}&0\\0&\frac{1}{7}&\frac{3}{7}&1\end{array}\right]$$

$r_2 \to 7r_2$ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right]$

$r_1 \to \frac{2}{7}r_2 + r_1$ $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{7}{7} & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right] = [A_R^{-1}/E]$

نجد أن $A_R^{-1} = [\ \ ]$ فإن $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = E$ معكوس A^{-1}

أي أن (نظرية a)

$$(A^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = A$$

مثال إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $a = 9$ أوجد aA , $(aA)^{-1}$, $\frac{1}{a}A^{-1}$

الحل:

$$aA = 9A = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 27 & 63 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{a}A^{-1} = \frac{1}{9}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \text{———} \ 1$$

الآن نوجد $(aA)^{-1}$ بالعمليات الصفية على المصفوفة الموسعة

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 9 & 18 & 1 & 0 \\ 27 & 63 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -3r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 9 & 18 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$r_1 \xrightarrow{r_1/9} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{9}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right]$$

$$r_1 \longrightarrow -2r_2+r_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7/9 & -2/9 \\ 0 & 1 & -3/9 & 1/9 \end{array}\right] \text{ --- } ②$$

$$(9A)_R = I = (aA)_R \qquad (9A)^{-1} = (aA)^{-1}$$

$$(9A)^{-1} = \frac{1}{9} A^{-1}$$

من ① و ② نلاحظ أن:

$$(aA)^{-1} = \frac{1}{a} A^{-1}$$ أي أن (نظرية b)

مثال : في المثال 3 نوجد $(A^2)^{-1}$, $(A^{-1})^2$

$$(A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -16 \\ -24 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow ①$$

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 24 & 20 \end{bmatrix} = A^2$$

$$(A^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 20 & -16 \\ -24 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow ②$$

من ① و ② نلاحظ أن

$$(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$$ (نظرية c)

الشيت الثالث

المنظومات

منظومة المعادلات الخطية

تعريف :- أي مجموعة معادلات على الصورة :-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

تسمى منظومة معادلات خطية من النوع $m\times n$ حيث m هو عدد المعادلات و n هو عدد المجاهيل أو المتغيرات x_i و a_{ij} ثوابت وتسمى بالمعاملات لجميع أو لـ $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

وهذه المنظومة تكافئ $AX = B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ هي مصفوفة المعاملات

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ هي مصفوفة الحد المطلق

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ هي مصفوفة المتغيرات أو المجاهيل

ملاحظة: القيم العددية للمتغيرات x_i تسمى حل للمنظومة إذا حققت كل معادلة من المنظومة.

ملاحظة: يمكن التعرف على المعادلات من المصفوفة الموسعة:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

تعريف منظومة المعادلات الخطية المتجانسة والغير متجانسة:

إذا كانت $AX=B$ منظومة معادلات خطية من النوع $m \times n$ فإننا نقول بأنها:

1. منظومة متجانسة إذا كان $B=0$ (المصفوفة الصفرية)
2. منظومة غير متجانسة إذا كان $B \neq 0$ (B مصفوفة الحد المطلق)

مثال:

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 \qquad - 2x_3 = -1$$

هي منظومة معادلات خطية وغير متجانسة من النوع 2×3

2×3

الصف: عدد المعادلات

العمود: عدد المجاهيل

فيها

$a_{11}=1,\ a_{12}=-3,\ a_{13}=1$

$a_{21}=2,\ a_{22}=0,\ a_{23}=-2,\ b_1=2,\ b_2=-1$

مصفوفة المعاملات هي :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المجاهيل أو المتغيرات هي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الحد المطلق هي :

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الموسعة لهذه المنظومة هي :

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

مثال :

$$5x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 0$$

هي منظومة معادلات خطية متجانسة من النوع 1×4

فيها $a_{11} = 5$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 7$, $a_{14} = -3$, $b_1 = 0$

الأعمدة (عدد المجاهيل) 4

(عدد المعادلات) الصف 1 $\rightarrow$ $5x_1 - 3x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 0$

مصفوفة المعاملات هي :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المجاهيل أو المتغيرات هي :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الحد المطلق

$$B = [0]$$

المصفوفة الموسعة لهذه المنظومة هي :

$$[A|B] = [5 \quad -3 \quad 7 \quad -3 \,|\, 0]$$

مثال : اكتب المنظومة الآتية على الصورة $AX=B$ وأوجد المصفوفة الموسعة لها :

$$x_1 - x_2 + 5x_3 - x_5 = 1$$
$$x_1 - x_3 + x_4 = 0$$
$$x_4 + x_5 = 8$$

الحل :

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$A_{3\times4}$ مصفوفة المعاملات

X مصفوفة المتغيرات أو المجاهيل

B الحد المطلق

وهي منظومة معادلات خطية غير متجانسة لان $B \neq 0$ من النوع 3×4 والمصفوفة الموسعة لها هي :

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

مثال: اكتب المنظومة الآتية على الصورة $AX=B$ وأوجد المصفوفة الموسعة $[A|B]$ لها.

$$2X_1-3X_2+X_3=2$$
$$X_1 \qquad +3X_3=-3$$

الحل: هي منظومة معادلات خطية غير متجانسة من النوع 2×3 وهي على الصورة

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A مصفوفة المعاملات

X مصفوفة المجاهيل أو المتغيرات

B مصفوفة الحد المطلق

المصفوفة الموسعة لهذه المنظومة هي:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

الواجب:

حدد نوع المنظومات الآتية واكتبها على الصورة $AX=B$ وأوجد المصفوفة الموسعة لها.

①
$$2X_1-X_2+X_3=-2$$
$$X_1 \qquad -X_3=5$$
$$X_1+X_2+4X_3=0$$

②
$$X_1-3X_2 \qquad =0$$
$$X_1+4X_2-5X_3=0$$
$$X_2-X_3=0$$

حل منظومة المعادلات الخطية :-

القيم العددية للمتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تسمى حل المنظومة إذا حققت كل معادلة من المنظومة.

أي أن إذا كانت

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

حيث k_i ثوابت

تحقق جميع المعادلات الخطية التي تحويها المنظومة.

تعريف :-

تسمى المنظومة $AX=B$ منظومة متوافقة إذا وجد لها حل واحد على الأقل.

إذا لم يوجد حل المنظومة $AX=B$ فإننا نقول بأن المنظومة غير متوافقة.

إيجاد حل المنظومات الخطية باستخدام الاختزال :-

يمكن حل منظومة معادلات خطية (إن وجد لها حل) وذلك باختزال المصفوفة الموسعة $[A|B]$ ثم التعرف على المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة $[A|B]_R$

ويكون كل حل لمنظومة المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة $[A|B]_R$ هو حل للمنظومة المناظرة للمصفوفة $[A|B]$ والعكس صحيح

لأنه يمكن الحصول على $[A|B]_R$ من $[A|B]$ والعكس باستخدام العمليات الصفية الأولية والتي لا تؤثر على حل المعادلات المناظرة

ثالثاً: حل منظومة المعادلات الخطية المتجانسة:-

مثال: أوجد حل المنظومة الخطية الآتية:-

$$x_1 - 3x_2 = 0$$
$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

الحل: هذه منظومة معادلات متجانسة نحاول اختزال المصفوفة الموسعة $[A|B]$ لإيجاد الحل ومعرفة الرتبة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -7r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to 3r_2 + r_1]{r_3 \to r_3/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_3]{r_1 \to 3r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

وهذه المصفوفة الموسعة $[A|B]_R$ تكافئ منظومة المعادلات الخطية:-

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0$$

$r = 3$

هو حل المنظومة المعطاة $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

هو الحل البديهي (التافه) الصفري.

من المصفوفة المختزلة $[A|B]_R$ نلاحظ أن :

$Rank(A) = Rank(A|B) = 3$ = عدد المجاهيل (المتغيرات)

إذاً يوجد حل وحيد الصفري البديهي التافه.

واجب : أوجد حل المنظومة الخطية المتجانسة :

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 = 0$$

مثال : أوجد حل المنظومة الخطية المتجانسة :

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0$$

الحل : هي منظومة معادلات متجانسة نحاول اختزال المصفوفة الموسعة $[A|B]$ لإيجاد الحل ومعرفة الرتبة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] = [A|B]_R$$

المصفوفة المختزلة لـ $[A|B]$

$Rank(A|B) = Rank(A) = 2 < 3$ عدد المجاهيل

نوجد المعادلات المناظرة للمصفوفة الموسعة المختزلة فيكون حلها هو حل المنظومة الأصلية

ثانياً: حل منظومة المعادلات الخطية المتجانسة :-

مثال: أوجد حل المنظومة الخطية الآتية :-

$$x_1 - 3x_2 = 0$$
$$x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$

الحل: هذه منظومة معادلات متجانسة نحاول اختزال المصفوفة الموسعة $[A|B]$ لإيجاد الحل ومعرفة الرتبة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -7r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to 3r_2 + r_1]{r_3 \to r_3/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_3]{r_1 \to 3r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

وهذه المصفوفة الموسعة $[A|B]_R$ تكافئ منظومة المعادلات الخطية :-

$$1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = 0$$
$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = 0$$

إذاً $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ هو حل المنظومة المعطاة

هو الحل البديهي «التافه» الصفري.

نلاحظ أن:

من المصفوفة المختزلة $[A|B]_R$

عدد المجاهيل (المتغيرات) $= Rank(A) = Rank(A|B) = 3$

إذاً يوجد حل وحيد هو الحل الصفري البديهي (التافه).

واجب: أوجد حل المنظومة الخطية المتجانسة:

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + 5x_2 = 0$$

مثال: أوجد حل المنظومة الخطية المتجانسة:

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 \qquad = 0$$

الحل: هي منظومة معادلات متجانسة ذات مجاهيل لذا نستخدم المصفوفة الموسعة $[A|B]$ لإيجاد الحل ومعرفة الرتبة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] = [A|B]_R$$

المصفوفة المختزلة لـ $[A|B]$

$Rank(A|B) = Rank(A) = 2 < 3$ عدد المجاهيل

يوجد عدد لا نهائي من الحلول ويكون حل المنظومة المختزلة هو حل المنظومة الأصلية

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{ll} 1x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 & (1) \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 & (2) \end{array}$$

x_3 متغير موجود في المعادلتين فهو المتغير الحر الوحيد

نفرض أن $x_3 = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ أي قيمة ضمن الاعداد الحقيقية بالتعويض في (1) و (2)

$x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{1}{2}\alpha$

$x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = -\frac{1}{2}\alpha$

إذاً الحل العام للمنظومة هو

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

أي أن المنظومة عدد لانهائي من الحلول

كلما تغيرت قيمة α يتغير الحل العام

ونلاحظ أن $\text{Rank}(A) = 2 <$ عدد المجاهيل

$\text{Rank}(A) = 2 < 3$

يمكن إستنتاج أنه إذا كانت رتبة A أقل من عدد المجاهيل فإن المنظومة الخطية المتجانسة عدد لانهائي من الحلول.

واجب

أوجد حل المنظومة الخطية المتجانسة:

$x_1 + 2x_2 = 0$

نظرية:

1. منظومة المعادلات الخطية المتجانسة متوافقة دائماً.
2. إذا كان $A_{m\times n}X=0$ وكانت A مصفوفة المعاملات من النوع $m\times n$ أي أن المنظومة بها m من المعادلات و n من المتغيرات، فإن

a. إذا كان $Rank(A)=n$ فإن المنظومة لها حل وحيد (الحل الصفري أو البديهي) بمعنى إذا كان عدد المجاهيل يساوي عدد المعادلات في المنظومة المختزلة فإن المنظومة لها حل وحيد.

b. إذا كان $Ran(A)<n$ فإن للمنظومة عدد لانهائي من الحلول، توجد المتغيرات الحرة (المستقلة) ومنها نوجد الحل العام للمنظومة.

مثال: أوجد حل المنظومة الآتية:

$$5x_1-3x_2+7x_3-3x_4=0$$

الحل:

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cccc|c}5 & -3 & 7 & -3 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r_1\to r_1/5}$$

$$[A|B]_R=\left[\begin{array}{cccc|c}1 & -\frac{3}{5} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{5} & 0\end{array}\right]$$

المعادلات المناظرة للمصفوفة الموسعة

$$x_1-\frac{3}{5}x_2+\frac{7}{5}x_3-\frac{3}{5}x_4=0$$

هنا يوجد 3 متغيرات حرة وهي x_2, x_3, x_4

نفرض أن $x_2=\alpha,\ x_3=\beta,\ x_4=\omega$ حيث $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$ أعداد حقيقية اختيارية

بالتالي فإن قيمة x_1 تعتمد على α, β, ω

$$x_1=\frac{3}{5}\alpha-\frac{7}{5}\beta+\frac{3}{5}\omega$$

إذن الحل العام للمنظومة هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5}\alpha - \frac{7}{5}\beta + \frac{3}{5}\omega \\ \alpha \\ \beta \\ \omega \end{bmatrix} ; \alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

يمكن كتابته على الصورة

$$X = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

ثانياً: حل منظومة المعادلات الخطية الغير متجانسة:

مثال: أوجد حل المنظومة الخطية الغير متجانسة:

$$x_1 - x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

الحل:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = \boxed{[A|B]}_R$$

هي المصفوفة المختزلة للمصفوفة الموسعة نوجد المعادلات المناظرة ونوجد حلها فيكون هو حل المنظومة الأصلية

من المصفوفة $[A|B]_R$ نحصل على:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -1$$

إذاً يوجد حل وحيد للمنظومة وهو
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن:

$$Rank(A) = Rank(A|B) = 2 =$$ عدد المجاهيل

واجب: أوجد حل المنظومة الخطية الغير متجانسة:

$$x_1 - 2x_2 = 3$$
$$x_1 + x_2 = 5$$

وحدد رتبتها

مثال ② أوجد حل المنظومة الخطية الغير متجانسة :

$$x_1 - x_2 = 3$$

وأوجد رتبة $[A]$ ورتبة $[A|B]$

الحل :-

$$x_1 - x_2 = 3$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \end{array}\right] = [A|B]_R$$

المصفوفة جاهزة في الصورة المختزلة ولها نفس المعادلة $x_1 - x_2 = 3$ نأخذ المتغير x_2 هو المتغير الحر

$x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن x_1 تساوي $x_1 = 3 + x_2$

$$x_1 = 3 + \alpha$$

إذاً الحل العام هو :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore$ يوجد عدد لانهائي من الحلول لأن $\alpha \in \mathbb{R}$ تأخذ قيم لانهائية من $\mathbb{R}$ (أي أن المنظومة متوافقة)

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A|B) = 1 < \underset{n=2}{(\text{عدد المجاهيل})}$$

يمكن استنتاج إذا كان $r(A) = r(A|B) < n$ فإن للمنظومة عدد لانهائي من الحلول .

واجب: بين أن المنظومة الاتية متوافقة وأوجد حلها:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_3 = -1$$

مثال ③: بين هل المنظومة الاتية متوافقة أو غير متوافقة

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 = -1$$

الحل:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{-7}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to -3r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A|B]_R$$

تحصلنا على $[A|B]_R$ فيها الصف الثاني $0x_1 + 0x_2 = 1$ وهذه المعادلة غير صحيحة لانه مستحيل أن $0 = 1$ لذلك فإن المنظومة لايوجد لها حل.

والتفسير الهندسي أن المعادلتين يمثلان خطان مستقيمان متوازيان لايتقاطعان أي لايوجد لهما حل مشترك.

نلاحظ أن: $Rank(A) = 1 < Rank(A|B) = 2$

يمكن إستنتاج إذا كان $Rank(A) < Rank(A|B)$ فإن المنظومة غير متوافقة.

واجب: بين أن المنظومة الآتية متوافقة وأوجد حلها:

$$x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2$$
$$x_1 + x_3 = -1$$

مثال ③: بين هل المنظومة الآتية متوافقة أو غير متوافقة

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 = -1$$

الحل:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{-7}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to -3r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A|B]_R$$

تحصلنا على $[A|B]_R$ فيها الصف الثاني $0x_1 + 0x_2 = 1$ وهذه المعادلة غير صحيحة لانه مستحيل أن $0 = 1$ لذلك فإن المنظومة لا يوجد لها حل.

والتفسير الهندسي أن المعادلتين يمثلان خطان مستقيمان متوازيان لا يتقاطعان أي لا يوجد لها حل مشترك.

نلاحظ أن: $Rank(A) = 1 < Ran(A|B) = 2$

يمكن استنتاج إذا كان $Rank(A) < Rank(A|B)$ فإن المنظومة غير متوافقة.

واجب: وضّح هل المنظومة الآتية متوافقة أم لا

$$3X_1 - 9X_2 = 4$$
$$X_1 - 3X_2 = 2$$

الملخص

$AX = 0$ منظومة المعادلات الخطية المتجانسة

(متوافقة دائمًا)

إذا كان $r(A) = n$
فإن المنظومة حل وحيد صفري

$r(A) < n$
فإن المنظومة عدد لانهائي من الحلول

$AX = B$ منظومة المعادلات الخطية الغير متجانسة

$r(A) = r(A|B)$
فإنها متوافقة

$r(A) < r(A|B)$
فإنها غير متوافقة

$r(A) = r(A|B) = n$
يوجد حل وحيد غير صفري

$r(A) = r(A|B) < n$
يوجد عدد لانهائي من الحلول

نظرية: إذا كانت $AX=B$ منظومة معادلات خطية من النوع $n\times n$ فإن المنظومة لها حل وحيد إذا و إذا كانت فقط $|A|\neq 0$.

غير صفري

البرهان:

أولاً ($\Leftarrow$)

نفرض أن $AX=B$ منظومة معادلات خطية من النوع $n\times n$ لها حل وحيد أي أنها متوافقة بالتالي $r(A)=n$ أي أن $Rank(A)=Rank(A|B)=n$

هذا يعني أن A تكافئ صفياً مصفوفة الوحدة I_n و ← معكوس A موجود ← A غير شاذة أي

$|A|\neq 0$

ثانياً ($\Rightarrow$)

نفرض أن $AX=B$ منظومة معادلات خطية من النوع $n\times n$ و $|A|\neq 0$ فإن A^{-1} موجود إذاً $AX=B$ لها حل وحيد هو

$$X=A^{-1}B$$

لأن

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

مثال: أثبت أن المنظومة الآتية لها حل وحيد ثم أوجده

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_2 + 2x_3 = 3$$

الحل: نطبق النظرية السابقة لأن المنظومة المعطاة غير متجانسة و A من النوع 3×3 نوجد $|A|$ إذا كان لا يساوي الصفر فإن المنظومة لها حل وحيد

$$|A| = \begin{vmatrix} {}^{+}1 & -1 & -1 \\ {}^{-}1 & 1 & 1 \\ {}^{+}0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A| = (2-1) - (-2+1) = 1+1 = 2$$

$$|A| \neq 0$$

∴ يوجد حل وحيد للمنظومة (أي أنها متوافقة)

نوجد حل المنظومة باختزال المصفوفة الموسعة

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -r_1 + r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to -r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} \end{array}\right] = [A|B]_R$$

المعادلات المناظرة للمصفوفة المختزلة هي :

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = \frac{5}{2}$$

إذاً الحل الوحيد للمنظومة المعطاة هو

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

واجب :

أثبت أن للمنظومة الآتية حل وحيد وأوجده

$$x_1 - 2x_2 = 3$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

إيجاد حل منظومة معادلات خطية باستخدام نظرية كريمر:

نظرية كريمر: إذا كانت $AX=B$ منظومة معادلات خطية من النوع $n\times n$ حيث A مصفوفة غير شاذة وإذا كانت A_j هي المصفوفة A بعد استبدال العمود j بالعمود $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ فإن حل هذه المنظومة هو

$$x_j=\frac{|A_j|}{|A|}$$ حيث $j=1,2,\dots,n$

البرهان:

بما أن A غير شاذة فإن المنظومة $AX=B$ لها حل وحيد (من النظرية صفحة 16) وهو $X=A^{-1}B$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث C_{ij} المتمم المميز للعنصر a_{ij}

$$\therefore X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & C_{3n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \cdots + c_{n1}b_n \\ c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \cdots + c_{n2}b_2 \\ \vdots \\ c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \cdots + c_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \dfrac{c_{11}b_1 + c_{21}b_2 + \cdots + c_{n1}b_n}{|A|} \\ \dfrac{c_{12}b_1 + c_{22}b_2 + \cdots + c_{n2}b_2}{|A|} \\ \vdots \\ \dfrac{c_{1n}b_1 + c_{2n}b_2 + \cdots + c_{nn}b_n}{|A|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

أي أن

$$x_j = \frac{c_{1j}b_1 + c_{2j}b_2 + \cdots + c_{nj}b_n}{|A|}$$

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

مثال: حل المنظومة الآتية باستخدام قاعدة كريمر

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$x_2 + 2x_3 = 3$$

الحل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$|A| = (2-1) - (-2+1) = 1-(-1) = 2 \neq 0$$

$A_{3\times3}$, $|A| \neq 0$ فإنه يوجد حل وحيد

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-2+1) + 3(-1+1)$$

$$|A_1| = -(-1) = 1$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2-3)-(3)$$

$$= -1-3 = -4$$

$$|A_2| = -4$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (3-1)-(-3)$$

$$= 2+3 = 5$$

$$|A_3| = 5$$

من نظرية كريمر الحل هو :-

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{5}{2}$$

للتحقيق والتأكيد نعوض بهذه القيم في المنظومة المعطاة للمسألة نجدها تحقق جميع المعادلات

$$X_1 - X_2 - X_3 = \frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2} = \frac{1+4-5}{2} = 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{5}{2} = \frac{1-4+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$X_2 + 2X_3 = -2 + 2\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{-4+10}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

واجب :- حل منظومة المعادلات الاتية باستخدام قاعدة كريمر :-

$$X_1 - 2X_2 = 3$$
$$X_1 + X_2 = 5$$

مثال: أوجد الشرط على λ و μ بحيث تكون المنظومة لها

(i) حل وحيد (ii) عدد لانهائي من الحلول

(iii) لا يوجد لها حل.

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$
$$3x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 2$$
$$x_1 + 7x_2 - 6x_3 = \mu$$

الحل:

المنظومة لها حل وحيد عندما

$Rank(A) = Rank(A|B) = n$ (عدد المجاهيل)

المنظومة عدد لانهائي من الحلول عندما

$Rank(A) = Rank(A|B) < n$ (عدد المجاهيل)

المنظومة لا يوجد لها حل أي غير متوافقة عندما

$Rank(A) < Rank(A|B)$

نوجد رتبة A ورتبة $A|B$ من المصفوفة المختزلة للمصفوفة الموسعة $[A|B]$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & \lambda & 2 \\ 1 & 7 & -6 & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \mu \\ 3 & -1 & \lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to -2r_1+r_2]{r_2 \to -3r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \mu \\ 0 & -22 & 18+\lambda & -3\mu+2 \\ 0 & -11 & 13 & 5-2\mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \mu \\ 0 & -11 & 13 & 5-2\mu \\ 0 & -22 & 18+\lambda & 2-3\mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -2r_2+r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -6 & \mu \\ 0 & -11 & 13 & 5-2\mu \\ 0 & 0 & \lambda-8 & -8+\mu \end{array}\right]$$

وهي المصفوفة الدرجية ومنها يمكن إيجاد قيم λ, μ على حسب الحل المطلوب

1. لكي يكون للمنظومة حل وحيد يجب أن يكون

$$r(A) = r(A|B) = 3$$

أي أن: $\lambda - 8 \neq 0 \quad , \quad -8 + \mu \neq 0$

$$\lambda \neq 8 \quad , \quad \mu \neq 8$$

أي $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{8\}$

2. لكي يكون للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول يجب أن يكون

$$r(A) = r(A|B) < 3$$

أي أن

$$\lambda - 8 = 0 \quad , \quad -8 + \mu = 0$$

$$\lambda = 8 \quad , \quad \mu = 8$$

$$\lambda = 8 \quad , \quad \mu = \lambda = 8$$

3 أي لا يكون المنظومة أي لا يوجد لها حل يجب أن

$r(A) < r(A|B)$

يكون

أي أن $\lambda - 8 = 0 , \mu - 8 \neq 0$

$\lambda = 8 , \mu \neq 8$

واجب:-

أوجد الشروط على λ , μ بحيث تكون المنظومة لها:-

(i) حل وحيد

(ii) عدد لانهائي من الحلول.

(iii) لا يوجد لها حل

$$x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 7x_2 + \lambda x_3 = \mu$$

الشيت الرابع

الفضاءات المتجهة

مصور أفريقيا

رياضة 2

الفضاءات المتجهة

15P

إعداد الاستاذة : أمل الهادي العيادي

2021

[مع تمنياتنا للجميع بالنجاح والتوفيق]

الاسم..

الفضاءات المتجهة
vector spaces

تعريف المتجه (vector) :- هو تعبير عن كميات تتحدد بمقدار واتجاه مثل القوة والإزاحة والسرعة ويرمز له بالرمز $\vec{V}$ وهو عبارة عن مصفوفة من الدرجة 1xn أو nx1 ويكتب على الشكل

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \quad \text{or} \quad \vec{V} = [v_1, v_2, \dots, v_n]_{1\times n}$$

حيث v_i مركبات المتجه $\vec{V}$ (vector components) و $i=1,2,\dots,n$ ويكون المتجه $\vec{V}$ في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ Euclidean space

فضاء ذو بعد واحد $n=1$ ⟷ $\vec{V}=[x]$

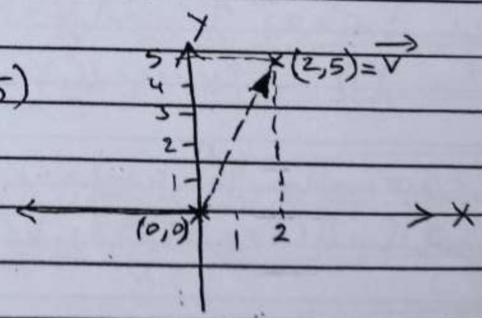
فضاء ذو بعدين $n=2$ ⟷ $\vec{V}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

ملاحظة :- كل متجه $\vec{V}=(v_1,v_2)$ مرتبط بقطعة مستقيم متجه بدايتها عند نقطة الأصل $O(0,0)$ ونهايتها عند النقطة $p(v_1,v_2)$ يرمز لقطعة المستقيم المتجه من الصفر إلى p بالرمز $\vec{op}$ واتجاه قطعة المستقيم هي الزاوية المصنوعة مع محور x الموجب

Ex:- $\vec{V}=(2,5)$

$\vec{O}=(0,0)$, $p(2,5)$

$\vec{V}=\vec{op}=(2,5)$

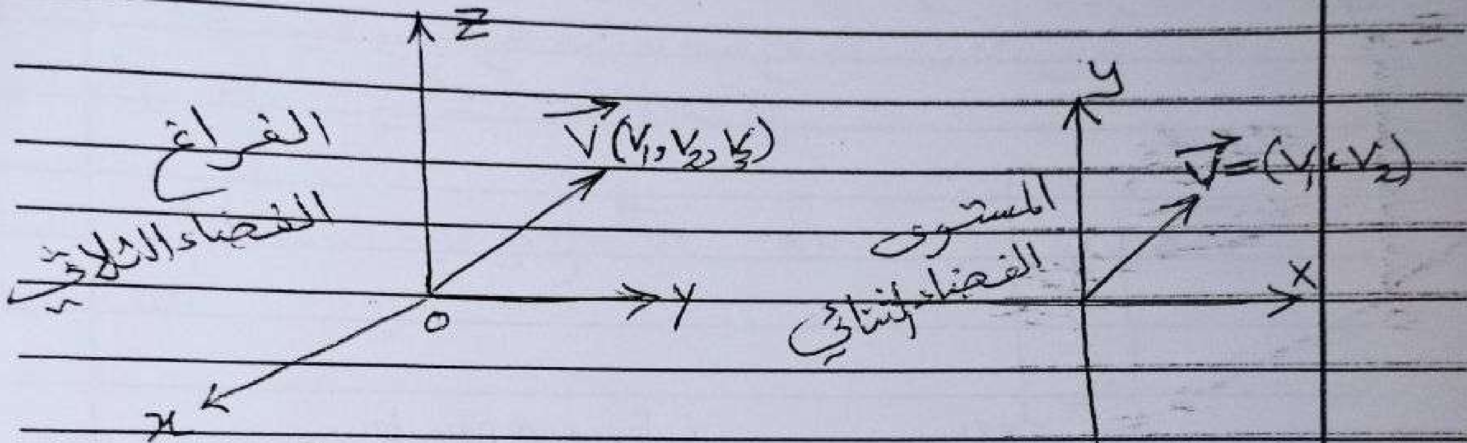


مجموعة كل المتجهات في المستوى تعرف بالفضاء الثنائي

$$\mathbb{R}^2=\{(a,b) : a,b\in\mathbb{R}\}$$

مجموعة المتجهات في الفضاء الثلاثي تعرف

$$\mathbb{R}^3=\{(a,b,c) : a,b,c\in\mathbb{R}\}$$



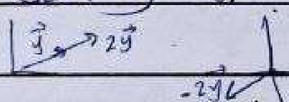
تعرف عملية الجمع العادية على متجهات $\mathbb{R}^2$ كالتالي

تحرك 2 لـ 1 وترسم بسهم $u+v=(u_1,u_2)+(v_1,v_2)=(u_1+v_1,u_2+v_2)\in\mathbb{R}^2;\ u,v\in$

عملية ضرب متجه في عدد قياسي λ تعرف:

$$\lambda u=\lambda(u_1,u_2)=(\lambda u_1,\lambda u_2)\quad,\ u\in\mathbb{R}^2\ ,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

فإن $\mathbb{R}^2$ نظام رياضي   Scaling ضرب



تعرف عملية الجمع العادية على متجهات $\mathbb{R}^3$ كالتالي

$$u+v=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3)\in\mathbb{R}^3$$

حيث $u,v\in\mathbb{R}^3$

وعملية ضرب متجه في عدد قياسي λ تعرف:

$$\lambda u=\lambda(u_1,u_2,u_3)=(\lambda u_1,\lambda u_2,\lambda u_3);\ u\in\mathbb{R}^3,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

وهكذا بالنسبة للفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^n$ مالم تعرف عملية الجمع والضرب بطريقة أخرى في المسألة.

فضاءات

في $\mathbb{R}^n$ ومنه متجهات V

تعريف: فضاء المتجهات

إذا كان F مجال الأعداد وكانت V مجموعة غير خالية من المتجهات معرف عليهما عمليتان الجمع والضرب بعدد بحيث:

لكل $\vec{u},\vec{v} \in V$ فإن $\vec{u}+\vec{v} \in V$ حاصل الجمع هو متجه في V

لكل $\vec{u} \in V$ ، $\lambda \in F$ فإن حاصل ضربهما $\lambda\vec{u} \in V$ هو متجه موجود في الفضاء V

فإن V نظام رياضي [F أعداد قياسية ، V متجهات]

لكي يكون هذا النظام فضاء متجهي على F إذا تحققت الشروط الثمانية التالية:

1. تبديل — $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ لكل $\vec{u},\vec{v} \in V$
2. تجميع — $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ لكل $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$
3. محايد جمعي — يوجد عنصر $\vec{0} \in V$ بحيث $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$ لكل متجه $\vec{u} \in V$
4. سالب المتجه — لكل $\vec{u} \in V$ يوجد $-\vec{u} \in V$ بحيث $\vec{u}+(-\vec{u}) = -\vec{u}+\vec{u} = \vec{0}$
5. محايد ضربي — لكل $\vec{u} \in V$ يكون $1.\vec{u} = \vec{u}$ حيث $1 \in F$
6. لكل $\lambda \in F$ ولكل $\vec{u},\vec{v} \in V$ يكون $\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$ — توزيع عدد
7. لكل $\alpha,\beta \in F$ ، $\vec{u} \in V$ فإن $(\alpha+\beta)\vec{u} = \alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$ — توزيع vector
8. لكل $\alpha,\beta \in F$ ، $\vec{u} \in V$ فإن $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ — تجميع في الضرب

هل فضاء متجهي او لا
شروط رياضية { 1- جمع 2- ضرب 3- الشروط العشرة

مثال: إذا كان F مجال الاعداد الحقيقية و $V = \mathbb{R}^3$ حيث
$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ يعرف جمع
المتجهات في $\mathbb{R}^3$:

(1) $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$

(2) والضرب بعدد من F يعرف بـ
$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \; ; \alpha \in F$

فإن $\mathbb{R}^3$ فضاء متجه على F لتوفر جميع
شروط الفضاء المتجهي وهي :

(3)

1. $\vec{u}+\vec{v} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$
$= (y_1+x_1, y_2+x_2, y_3+x_3) = \vec{v} + \vec{u}$
لكل $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (x_1, x_2, x_3) + (y_1+z_1, y_2+z_2, y_3+z_3)$
$= (x_1+y_1+z_1, x_2+y_2+z_2, x_3+y_3+z_3)$
$= (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) + (z_1, z_2, z_3)$
$= (\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w}$
حيث $\vec{w} \in V$

3. يوجد $\vec{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ بحيث لكل $\mathbb{R}^3 \ni \vec{u} = (x_1, x_2, x_3)$
يكون
$\vec{u} + \vec{0} = (x_1, x_2, x_3) + (0,0,0) = (x_1+0, x_2+0, x_3+0)$
$= (x_1, x_2, x_3) = \vec{u}$

4. لكل $\vec{u}=(x_1, x_2, x_3)$ يوجد $-\vec{u}=(-x_1, -x_2, -x_3)$ بحيث

$$\vec{u}+(-\vec{u}) = (x_1, x_2, x_3)+(-x_1, -x_2, -x_3)$$
$$= (x_1+(-x_1), x_2+(-x_2), x_3+(-x_3))$$
$$= (0, 0, 0) = \vec{0}$$

5. لكل $\vec{u}=(x_1, x_2, x_3)\in \mathbb{R}^3$ و $1\in F$ يكون

$$1.\vec{u} = 1.(x_1, x_2, x_3) = (1.x_1, 1x_2, 1x_3)$$
$$= (x_1, x_2, x_3) = \vec{u}$$

6. لكل $\lambda \in F$ ولكل $\vec{u}=(x_1, x_2, x_2), \vec{v}=(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ فإن

$$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) = \lambda(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$$
$$=(\lambda(x_1+y_1), \lambda(x_2+y_2), \lambda(x_3+y_3))$$
$$=(\lambda x_1+\lambda y_1, \lambda x_2+\lambda y_2, \lambda x_3+\lambda y_3)$$
$$= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)+(\lambda y_1, \lambda y_2, \lambda y_3)$$
$$= \lambda(x_1, x_2, x_3)+\lambda(y_1, y_2, y_3)$$
$$= \lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$$

7. لكل $\alpha, \beta \in F$ و $\vec{u}=(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ يكون

$$(\alpha+\beta)\vec{u} = (\alpha+\beta)(x_1, x_2, x_3)$$
$$=((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, (\alpha+\beta)x_3)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1, \alpha x_2+\beta x_2, \alpha x_3+\beta x_3)$$
$$=(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)+(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3)$$
$$=\alpha(x_1, x_2, x_3)+\beta(x_1, x_2, x_3)$$
$$=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$$

8 لكل $\alpha, \beta \in F$ ، $\vec{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$(\alpha\beta)\vec{u} = (\alpha\beta)(x_1, x_2, x_3) = ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, (\alpha\beta)x_3)$$

$$= (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), \alpha(\beta x_3))$$

$$= \alpha(\beta(x_1, x_2, x_3))$$

$$= \alpha(\beta\vec{u})$$

إذاً تحققت الشروط الثمانية لذلك فإن $\mathbb{R}^3$ فضاء متجه على مجال الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ تحت عمليتي الجمع والضرب المعرفتين.

مثال: ليكن F مجال الاعداد الحقيقية ولتكن $V = M_{2\times2}$ مجموعة كل المصفوفات من النوع 2×2 (المربعة) وعناصرها تنتمي إلى $\mathbb{R}$ فإن $M_{2\times2}$ فضاء متجه على $\mathbb{R}$ بالنسبة لعمليتي جمع المصفوفات وضربها بعدد المعرفتان كالتالي:

لكل $A, B \in M_{2\times2}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن

$$(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$(\alpha a)_{ij} = \alpha a_{ij}$$

فإن $M_{2\times2}$ فضاء متجه على $\mathbb{R}$ لتوفر جميع شروط الفضاء المتجه وهي:

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1+a_1 & b_2+a_2 \\ b_3+a_3 & b_4+a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{B} + \vec{A}$$

لكل $\vec{A}, \vec{B} \in M_{2\times 2}$

2 $$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 & b_4 + c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 + b_3 + c_3 & a_4 + b_4 + c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$= (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

حيث $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in M_{2\times 2}$

3 يوجد $\vec{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ حيث لكل $\vec{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

$$\vec{A} + \vec{O} = \begin{bmatrix} a_1 + 0 & a_2 + 0 \\ a_3 + 0 & a_4 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \vec{A}$$

4 لكل $\vec{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ يوجد $-\vec{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$

بحيث

$$\vec{A} + (-\vec{A}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 - a_1 & a_2 - a_2 \\ a_3 - a_3 & a_4 - a_4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{A}+(-\vec{A})=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\vec{0}$$

5. لكل $\vec{A}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}\in M_{2\times 2}$, $1\in\mathbb{R}$ فإن

$$1.\vec{A}=1\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.a_1 & 1.a_2\\ 1.a_3 & 1.a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=\vec{A}$$

6. لكل $\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{A},\vec{B}\in M_{2\times 2}$ فإن

$$\lambda(\vec{A}+\vec{B})=\lambda\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2\\ a_3+b_3 & a_4+b_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda(a_1+b_1) & \lambda(a_2+b_2)\\ \lambda(a_3+b_3) & \lambda(a_4+b_4)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda a_1 & \lambda a_2\\ \lambda a_3 & \lambda a_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda b_1 & \lambda b_2\\ \lambda b_3 & \lambda b_4\end{bmatrix}$$

$$=\lambda\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{bmatrix}$$

$$=\lambda\vec{A}+\lambda\vec{B}$$

7. لكل $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\vec{A}\in M_{2\times 2}$ فإن

$$(\alpha+\beta)\vec{A}=(\alpha+\beta)\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha+\beta)a_1 & (\alpha+\beta)a_2\\ (\alpha+\beta)a_3 & (\alpha+\beta)a_4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 & \alpha a_2 + \beta a_2 \\ \alpha a_3 + \beta a_3 & \alpha a_4 + \beta a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a_1 & \beta a_2 \\ \beta a_3 & \beta a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha \vec{A} + \beta \vec{A}$$

8 لكل $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\vec{A} \in M_{2\times2}$

$$(\alpha\beta)\vec{A} = (\alpha\beta) \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\beta)a_1 & (\alpha\beta)a_2 \\ (\alpha\beta)a_3 & (\alpha\beta)a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(\beta a_1) & \alpha(\beta a_2) \\ \alpha(\beta a_3) & \alpha(\beta a_4) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \beta a_1 & \beta a_2 \\ \beta a_3 & \beta a_4 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha(\beta \vec{A})$$

إذا تحققت الشروط الثمانية لذلك فإن $M_{2\times2}$ فضاء متجه على مجال الأعداد الحقيقية تحت عمليتي الجمع والضرب المعرفتين.

واجب: تحقق أن المجموعة $M_{2\times1} = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} : a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$ تكون فضاء متجه على المجال $\mathbb{R}$.

تطبيق شرطي الجمع باش نقول هذا الفضاء جزء من فضاء ثاني

الفضاءات الجزئية:

تعريف الفضاء الجزئي:

إذا كان V فضاء متجه على مجال F فإن أي مجموعة جزئية غير خالية W الفضاء المتجه V تسمى فضاء جزئي من V إذا كان W بدوره فضاء متجهاً على F بالنسبة إلى عمليتي الجمع والضرب المعرفتان على V.

نظرية:

إذا كانت W مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء المتجه V فإن W فضاءً جزئياً من $V \Longleftrightarrow$ إذا تحقق شرطين هما

1 $\vec{u}+\vec{v} \in W$ لكل $\vec{u}, \vec{v} \in W$

أي مغلقة بالنسبة لعملية جمع المتجهات

2 $\alpha \vec{u} \in W$ لكل $\vec{u} \in W$ و $\alpha \in F$

أي مغلقة بالنسبة لعملية الضرب بعدد

ويمكن جمع الشرطين (1) و(2) في شرط واحد هو

$\alpha \vec{u}+\vec{v} \in W$ لكل $\vec{u}, \vec{v} \in W$ و $\alpha \in F$.

ملاحظة:

لكل فضاء متجهي V على الأقل فضاءان جزئيان هما V نفسه والفضاء $\{0\}$ المكون من المتجه الصفري لا غير.

مثال: إذا كان $W=\{(a, b, a+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ أثبت أن W فضاء جزئي من $\mathbb{R}^3$.

الحل: نأخذ $u=(a_1, b_1, a_1+b_1)$ و $v=(a_2, b_2, a_2+b_2)$ عنصرين من W و $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن:

$$u+v=(a_1+a_2, b_1+b_2, a_1+b_1+a_2+b_2)$$
$$=(a_1+a_2, b_1+b_2, a_1+a_2+b_1+b_2)$$
$$=(a_1+a_2, b_1+b_2, (a_1+a_2)+(b_1+b_2)) \in W$$

$$\alpha u=\alpha(a_1, b_1, a_1+b_1)=(\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha(a_1+b_1))$$
$$=(\alpha a_1, \alpha b_1, \alpha a_1+\alpha b_1) \in W$$

واجب :-

إذا كان $W=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{R}\right\}$ بين أن W فضاء جزئي من $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ فضاء كل المصفوفات نوع 2×2 وعناصرها تنتمي إلى مجال الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

تعريف التركيبة الخطية :-

إذا كان V فضاء متجهي على مجال F و كانت $v \in V$, $S=\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subseteq V$

v يسمى تركيبة خطية من عناصر S إذا وجدت $c_i \in F$ $(i=1,2,\dots,n)$ بحيث :-

الحل

① $v=c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\dots\dots+c_nv_n$

تركيب خطي من

② $\left[v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n \;\middle|\; w \right]$

③ solve the system ناطق كيف اذن فاذا (1) إذا وجد الحل

مثال: إذا كان $v_1=(1,1,-1)$, $v_2=(6,2,2)\in \mathbb{R}^3$ بين أن $v=(9,1,7)$ يكون تركيبة خطية من v_1 , v_2

الحل:

v يكون تركيبة خطية من v_1 و v_2 إذا وجد عددان c_1 و c_2

بحيث $c_1v_1+c_2v_2=v$

$$c_1(1,1,-1)+c_2(6,2,2)=(9,1,7)$$

للتوضيح

$$(c_1+6c_2\,,\,c_1+2c_2\,,\,-c_1+2c_2)=(9,1,7)$$

$$(c_1,c_1,-c_1)+(6c_2,2c_2,2c_2)=(9,1,7)$$

$$(c_1+6c_2\,,\,c_1+2c_2\,,\,-c_1+2c_2)=(9,1,7)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نجد أن:

المركبة الأولى $c_1+6c_2=9$

المركبة الثانية $c_1+2c_2=1$

المركبة الثالثة $-c_1+2c_2=7$

هذه منظومة خطية غير متجانسة من النوع 3×2

لحل المنظومة نختزل المصفوفة الموسعة لها

$$\left[\begin{array}{cc|c}1&6&9\\1&2&1\\-1&2&7\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\to r_1+r_3]{r_2\to -r_1+r_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&6&9\\0&-4&-8\\0&8&16\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\to \frac{1}{8}r_3]{r_2\to -\frac{1}{4}r_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&6&9\\0&1&2\\0&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[r_1\to -6r_2+r_1]{r_3\to -r_2+r_3}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-3\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow c_1=-3\,,\;c_2=2$$

أي أن $v=-3v_1+2v_2$ تركيبة خطية من v_1 , v_2

مثال: إذا كان $u=(1,2,-1)$ و $v=(1,0,-1)$ متجهين في $\mathbb{R}^3$

بين أن $w=(1,0,2)$ ليس بتركيبة خطية من u و v

الحل:

w يكون تركيبة خطية من u و v إذا وجد $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ بحيث

$$c_1 u + c_2 v = w$$

بالتعويض

$$c_1(1,2,-1)+c_2(1,0,-1)=(1,0,2)$$

$$(c_1, 2c_1, -c_1)+(c_2, 0, -c_2)=(1,0,2)$$

$$(c_1+c_2, 2c_1, -c_1-c_2)=(1,0,2)$$

بمساواة المركبات المتناظرة نحصل على

المركبة الأولى $c_1+c_2=1$

المركبة الثانية $2c_1=0$

المركبة الثالثة $-c_1-c_2=2$

هذه منظومة معادلات خطية غير متجانسة من النوع 3x2

لحل هذه المنظومة نختزل المصفوفة الموسعة لها

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to -2r_1+r_2]{r_3 \to r_1+r_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن: $r(A)<r(B)$

لا يوجد للمنظومة حل

وهو واضح لوجود صف الثالث فيه $0c_1+0c_2=3$ وهذا غير منطقي رياضياً أي مستحيل إذاً لا توجد قيم لـ c_1, c_2 تحقق المنظومة أي أن w ليس تركيبة خطية من u و v.

واجب :-
إذا كانت $S \subset \mathbb{R}^3$ حيث عناصر S هي
$S = \{(1,2,1), (1,0,2), (1,1,0)\}$
أثبت أو بين أن المتجه $(1,1,1)$ هو تركيبة خطية من عناصر المجموعة S.

الأحد 7:55

الاستقلال والارتباط الخطي

تعريف الارتباط الخطي :-
إذا كان V فضاء متجهاً على مجال F وإذا كانت $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ مجموعة جزئية من V فإن S تسمى مجموعة مرتبطة خطية (غير مستقلة) إذا وجدت $c_i \in F$ حيث $i = 1, 2, \dots, n$ ليست كلها أصفار بحيث

$$\circledast \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n = \vec{0}$$

تعريف الاستقلال الخطي :-
إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $\circledast$ هو
$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$$
فإن S مجموعة مستقلة خطياً على F.

مثال :- إذا كانت $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ حيث $e_1 = (1,0,0)$، $e_2 = (0,1,0)$، $e_3 = (0,0,1)$ متجهات في $\mathbb{R}^3$
أثبت أن المجموعة S مستقلة خطياً.

الحل: إذا كان $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = \vec{0}$ حيث $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

فإن:

$$c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

∴ المجموعة S مستقلة خطياً

واجب: إذا كانت $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ مجموعة من المتجهات في $\mathbb{R}^3$

حيث $v_1 = (1,2,1)$ ، $v_2 = (2,9,0)$ ، $v_3 = (3,3,4)$

أثبت أن S مجموعة مستقلة خطياً

مثال: إذا كانت $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ مجموعة من المتجهات

في الفضاء المتجه $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ حيث

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن S مستقلة خطياً

الحل: شرط الاستقلال الخطي هو

إذا كان $c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3 + c_4E_4 = \vec{0}$ فإن $c_i = 0$ لجميع i

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

إذاً S مجموعة مستقلة خطياً.

واجب أثبت أن المجموعة $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ هي

مجموعة مستقلة خطياً.

نظرية :

إذا كانت $A \in M_{n \times n}(F)$ حيث F أي مجال فإن

A غير شاذة $\Longleftrightarrow$ صفوف A مستقلة خطياً على F.

نظرية :

إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة من المتجهات

غير الصفرية في فضاء متجه V على مجال F عندئذ تكون

S مرتبطة خطياً $\Longleftrightarrow$ أحد عناصر S تركيبة خطية

من باقي العناصر. أي أن $v_i = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{i-1} v_{i-1}$

$+ c_{i+1} v_{i+1} + \cdots + c_n v_n$

مثال :- بين ما إذا كانت المتجهات التالية مستقلة

أو مرتبطة خطياً :-

$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (-1, -1, -3, -4)$, $v_3 = (2, 2, 6, 8)$

الحل :-

المجموعة مرتبطة خطياً إذا وجدت $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$

ليست جميعها أصفار

بحيث $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$C_1(1,2,3,4)+C_2(-1,-1,-3,-4)+C_3(2,2,6,8)=0$

$(C_1-C_2+2C_3,\ 2C_1-C_2+2C_3,\ 3C_1-3C_2+6C_3,\ 4C_1-4C_2+$

$= (0,0,0,0)$

$$C_1-C_2+2C_3=0$$
$$2C_1-C_2+2C_3=0$$
$$3C_1-3C_2+6C_3=0$$
$$4C_1-4C_2+8C_3=0$$

وهي منظومة من المعادلات الخطية المتجانسة

لإيجاد الحل نختزل مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 4 & -4 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\\ C_3\\ C_4\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 4 & -4 & 8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\to -3r_1+r_3\\ r_4\to -4r_1+r_4}]{r_2\to -2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\to r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow \begin{array}{l}C_1=0\\ C_2-2C_3=0\end{array}$$

$C_3\in\mathbb{R}$ لذلك C_3 متغير مستقل

$\therefore\ C_1=0,\ C_2=2C_3$

$C_2=2\alpha$ فإن $C_3=\alpha$

مركز

فإن الحل العام للمنظومة هو :-

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2c_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} , \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} , \alpha \in \mathbb{R} \right\} \longrightarrow (*)$$

أي أن c_i ليست جميعها أصفار بالتالي
فإن المجموعة مرتبطة خطياً

مثال :- في المثال السابق بما أن المجموعة مرتبطة
خطياً اكتب أحد عناصرها كتركيبة خطية
من باقي العناصر
الحل :-

بما أن $c_1 = 0 , c_2 = 2 , c_3 = 1$ هو أحد
حلول المعادلة $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$
بالتعويض

$$0 . v_1 + 2 v_2 + 1 . v_3 = 0$$

$$\Longrightarrow v_3 = -2 v_2 + 0 v_1$$

إذاً v_3 تركيبة خطية من v_1 , v_2.

لو أخذنا $\alpha = -3$ في الحل العام (*) فإن

$$c_1 = 0 , c_2 = -6 , c_3 = -3$$

وهو حل للمعادلة $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

بالتعويض

$$0V_1 - 6V_2 - 3V_3 = 0$$

$$0V_1 - 3V_3 = 6V_2$$

$$0V_1 - \frac{1}{2}V_3 = \frac{0V_1 - 3V_3}{6} = V_2$$

أي أن V_2 تركيبة خطية من V_1 و V_3

مثال :- بين ما إذا كانت المتجهات التالية مستقلة أو مرتبطة خطياً :-

$$V_1 = (1,-1,1) , V_2 = (2,-1,2) , V_3 = (3,-3,4)$$

الحل :-

المجموعة $\{V_1, V_2, V_3\}$ مرتبطة خطياً إذا وجدت أعداد $c_i \in \mathbb{R}$ $i = 1,2,3$ ليست جميعها أصفاراً بحيث

$$c_1V_1 + c_2V_2 + c_3V_3 = 0$$

$$c_1(1,-1,1) + c_2(2,-1,2) + c_3(3,-3,4) = (0,0,0)$$

$$(c_1 + 2c_2 + 3c_3 , -c_1 - c_2 - 3c_3 , c_1 + 2c_2 + 4c_3) = (0,0,0)$$

المركبة الأولى

$$c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

$$-c_1 - c_2 - 3c_2 = 0$$

$$c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0$$

وهي منظومة معادلات خطية متجانسة لإيجاد الحل نختزل مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to -r_1 + r_3]{r_2 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(-1-\lambda)\left[-\lambda+\lambda^2-6\right]=0$$

$$-(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=0$$

$$\cancel{\lambda^2}-\lambda-6+\lambda^3-\cancel{\lambda^2}-6\lambda=0$$

$$\lambda^3-7\lambda-6=0$$

وهي المعادلة المميزة للمصفوفة H

ومن نظرية كيلي هاملتون المصفوفة H تحقق معادلتها المميزة أي أن :-

$$H^3-7H-6I=0 \quad \#$$

لإيجاد معكوس H

$$H^3-7H-6I=0$$

$$H^3-7H=6I$$

$$\frac{1}{6}(H^3-7H)=I$$

$$H\cdot\frac{1}{6}(H^2-7I)=I$$

أو

$$\frac{1}{6}(H^3-7H)=HH^{-1}$$

$$\frac{1}{6}(H^2-7I)\frac{H}{H}=H^{-1}$$

$$\frac{1}{6}(H^2-7I)=H^{-1} \quad \#$$

واجب : تحقق من نظرية كيلي هاملتون للمصفوفة $M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ وأوجد M^{-1}.

$$\xrightarrow{r_1 \to -2r_2+r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to -3r_3+r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذاً

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = 0 \,,\; c_2 = 0 \,,\; c_3 = 0$$

فإن المجموعة المعطاة غير مرتبطة أي مستقلة خطياً
ولذلك لا يمكن كتابة أي عنصر من عناصرها
كتركيبة خطية من باقي العناصر.

واجب :

بين ما إذا كانت المجموعات الآتية مرتبطة أم
مستقلة خطياً وإذا كانت مرتبطة خطياً اكتب
أحد عناصرها كتركيبة خطية من باقي العناصر.

(1) $\{(1,1,1), (2,2,0), (3,0,0)\}$

(2) $\{(2,-1,3), (4,1,2), (8,-1,8)\}$

(3) $\{(3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9), (1,4,-1)\}$

القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

تعريف :-

إذا كانت $A \in M_{n\times n}(F)$ ، $\lambda \in F$ فإن $|A-\lambda I|$

تسمى متعددة الحدود المتميزة للمصفوفة A.

حيث I مصفوفة الوحدة ، والمعادلة $|A-\lambda I|=0$ هي المعادلة المميزة للمصفوفة A.

مثال : أوجد متعددة الحدود المميزة والمعادلة المميزة للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

الحل :-

متعددة الحدود المميزة للمصفوفة A هي :-

$$|A-\lambda I|=\left|\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(-1-\lambda)=-1-\lambda+\lambda+\lambda^2=\lambda^2-1$$

والمعادلة المميزة للمصفوفة A هي المعادلة $|A-\lambda I|=0$

أي : $\lambda^2-1=0$

واجب : إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ أوجد متعددة الحدود المميزة لـ A ، والمعادلة المميزة لها.

تعريف القيمة الذاتية والمتجه الذاتي :-

إذا كانت $A \in M_{n\times n}(F)$ ، $\lambda \in F$ فإن λ قيمة ذاتية للمصفوفة A إذا وجد متجه u غير صفري بحيث

$$Au = \lambda u$$

ويسمى المتجه الغير الصفري u متجه ذاتي مناظر للقيمة الذاتية λ.

مبرهنة :-

(1) إذا كان $A \in M_{n\times n}(F)$ ، $\lambda \in F$ فإن λ قيمة ذاتية للمصفوفة $A \longleftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

هذا يعني أن القيم الذاتية لمصفوفة مربعة A هي حلول المعادلة $|A - \lambda I| = 0$

(2) المتجهات الذاتية المناظرة لقيمة ذاتية λ هي الحلول غير صفرية $X \neq 0$ للمعادلة المتجانسة $(A - \lambda I)X = 0$ التي مصفوفة معاملاتها $A - \lambda I$.

مثال :- أوجد القيم الذاتية ومتجه ذاتي يناظر كل قيمة ذاتية للمصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

المعادلة المميزة للمصفوفة A هي

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = -\lambda[-\lambda(3-\lambda)+3] + [1+\lambda(0)]$$
$$= -\lambda[-3\lambda+\lambda^2+3]+1$$
$$= 3\lambda^2-\lambda^3-3\lambda+1 = -\lambda^3+3\lambda^2-3\lambda+1$$
$$= -(\lambda-1)^3 = 0$$

توجد قيمة ذاتية وحيدة للمصفوفة A وهي $\boxed{\lambda=1}$

لإيجاد المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda=1$
المتجهات الذاتية هي الحلول غير الصفرية للمعادلة

$$(A-\lambda I)X = 0 \quad , \lambda = 1$$

$$(A-\lambda I)X = (A-I)X = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لإيجاد حل هذه المنظومة نختزل مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_1 + r_3} \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to -2r_2 + r_3} \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \to -r_2]{r_1 \to -r_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وهي الصورة المختزلة منظومة المعادلات الخطية لها هي

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 0\\ x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_3\\ x_2 &= x_3\end{aligned}$$

ليكن $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ متغير مستقل بالتالي $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$

متغيرات تابعة لـ x_3

أي أنه يوجد عدد لانهائي من الحلول للمنظومة

والحل العام هو

$$X = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{bmatrix} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

إذاً $\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$ هو متجه ذاتي مناظر للقيمة الذاتية $\lambda = 1$.

واجب :
أوجد القيم الذاتية ومتجه ذاتي مناظر لكل قيمة ذاتية للمصفوفة التالية :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

نظرية :
(i) المصفوفات المتشابهة لها نفس القيم الذاتية .
(ii) المتجهات الذاتية التي تناظر قيم ذاتية مختلفة تكون مستقلة خطياً

متعددات الحدود المصفوفية

تعريف :

إذا كانت $A \in M_{n\times n}(F)$ ، $P(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

أي متعددة حدود من الدرجة m على المجال F فإن

$$P(A) = b_m (A)^m + b_{m-1} (A)^{m-1} + \cdots + b_1 (A) + b_0 I$$

تمثل متعددة حدود في المصفوفة A .

مثال :-

إذا كانت $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 5$ ، $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

أوجد $P(A)$.

الحل :-

$$P(A) = 2A^3 - A^2 + 3A - 5I$$

$$= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 2\begin{pmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$P(A) = \begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

نظرية كيلي هاملتون:
كل مصفوفة مربعة تحقق معادلتها المميزة

مثال:- المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ تحقق من نظرية كيلي هاملتون.

الحل:- نجد المعادلة المميزة للمصفوفة A

$$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(4-\lambda)-6=0$$

$$4+\lambda^2-\lambda-4\lambda-6=0$$

$$f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda-2=0 \Longrightarrow (*)$$

وهي المعادلة المميزة للمصفوفة A

التحقق من نظرية كيلي هاملتون نعوض في (*) بـ A

$$f(A)=A^2-5A-2I$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \#$$

مثال :- أثبت أن المصفوفة

$$B=\begin{bmatrix} -4 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 9 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

تحقق المعادلة :-

$$B(2I-B)^2(4I+B)=0$$

الحل :- نوجد المعادلة المميزة للمصفوفة B

$$|B-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 9 & -4 & -\lambda \end{vmatrix}=0$$

نفك المحدد باستخدام العمود الأول :-

$$(-4-\lambda)\underbrace{\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 9 & -4 & -\lambda \end{vmatrix}}-4\underbrace{\begin{vmatrix} -12 & 12 & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{vmatrix}}=0$$

نوجد قيمة المحدد بالفك باستخدام الصف الأول أو العمود الثالث

قيمة المحدد صفر لأنه العمود الثالث جميع عناصره أصفار

$$(-4-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix}-4(0)=0$$

$$(-4-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda)=0$$

$$(-(4+\lambda))(2-\lambda)^2(-\lambda)=0$$

$$(4+\lambda)(2-\lambda)^2\lambda=0$$

$$\lambda(2-\lambda)^2(4+\lambda)=0$$

وهي المعادلة المميزة للمصفوفة B

من نظرية كيلي هاملتون المصفوفة B تحقق معادلتها :

$$B(2I-B)^2(4I+B)=0 \quad \#$$

مثال :- أثبت أن المصفوفة

$$H=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

تحقق المعادلة :

$$H^3-7H-6I=0$$

وأثبت ان المعكوس هو :

$$H^{-1}=\frac{1}{6}(H^2-7I)$$

الحل :- المعادلة المميزة للمصفوفة H هي :

$$|H-\lambda I|=0 \rightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=(-1-\lambda)\left[-\lambda(1-\lambda)-6\right]=0$$

$$(-1-\lambda)\left[-\lambda+\lambda^2-6\right]=0$$

$$-(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=0$$

$$\cancel{\lambda^2}-\lambda-6+\lambda^3-\cancel{\lambda^2}-6\lambda=0$$

$$\lambda^3-7\lambda-6=0$$

وهي المعادلة المميزة للمصفوفة H

ومن نظرية كيلي هاملتون المصفوفة H تحقق معادلتها المميزة أي أن :-

$$H^3-7H-6I=0 \quad \#$$

لإيجاد معكوس H

$$H^3-7H-6I=0$$

$$H^3-7H=6I$$

$$\frac{1}{6}(H^3-7H)=I$$

$$H.\frac{1}{6}(H^2-7I)=I$$

أو

$$\frac{1}{6}(H^3-7H)=HH^{-1}$$

$$\frac{1}{6}(H^2-7I)\frac{H}{H}=H^{-1}$$

$$\frac{1}{6}(H^2-7I)=H^{-1} \quad \#$$

واجب : تحقق من نظرية كيلي هاملتون للمصفوفة

$M=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ وأوجد M^{-1}.

الشيت الخامس

ملحق الفضاءات 2

مصور أفريقيا

رياضة 2

الملحق رقم 2 - الفضاءات

الأستاذة: امل العيادي

[مع تمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح]

الاسم: ....

خريف 2021-2022

توليد مجموعة من المتجهات
The span of a set of vectors

من تعريف التركيبة الخطية :-

إذا كان V $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \in$ مجموعة متجهات موجودة في الفضاء المتجهي V وكان $w \in V$ بحيث

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_n v_n$$

فإننا نقول أن w هو تركيبة خطية من المتجهات
$v_1, v_2, \ldots, v_n$

Def:- المجموعة الناتجة عن توليد مجموعة منتهية من المتجهات :- The span of $v_1, v_2, \ldots, v_n$

إذا كانت $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات في فضاء اتجاهي V نعرف المجموعة المتولدة من المجموعة S هي مجموعة كل المتجهات التي يمكن التعبير عنها كتركيبة خطية من متجهات المجموعة S ونرمز لها بالرمز $span(S)$ أي أن

$$span(S) = \{w : w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_n v_n\}$$

Theorem إذا كان $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ فإن $span(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ تكون فضاء جزئي من V.

proof

1

Spanning Set of V

تعريف :-
المجموعة $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ هي مجموعة مولدة للفضاء V $\Longleftrightarrow$ كل متجه في الفضاء V يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر هذه المجموعة

مثال :- ① إذا كانت $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ حيث المتجهات
$e_3 = (0,0,1)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ ، $e_1 = (1,0,0)$
S مجموعة مولدة للفضاء $\mathbb{R}^3$ (spanning set of $\mathbb{R}^3$).

الحل :- لأنه لأي متجه $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر المجموعة S كالتالي

$$(a,b,c) = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c)$$
$$= a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$
$$= a e_1 + b e_2 + c e_3$$

$\therefore$ (a,b,c) تركيبة خطية من عناصر S

$\therefore$ S تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال :- ② هل عناصر المجموعة $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث
$v_1 = (3,1,2)$, $v_2 = (1,0,1)$ $v_3 = (2,5,3)$

الحل :- نفرض متجه إختياري من $\mathbb{R}^3$ وليكن (a,b,c) وندرس هل هو تركيبة خطية من عناصر S أو لا ؟
إذا كان تركيبة خطية فإن S تولد $\mathbb{R}^3$.
وإذا كان ليس تركيبة خطية فإن S لا تولد $\mathbb{R}^3$.

نفرض أن :-
$$(a,b,c) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$
$$= c_1(3,1,2) + c_2(1,0,1) + c_3(2,5,3)$$
$$(a,b,c) = (3c_1 + c_2 + 2c_3 \, , \, c_1 + 5c_3 \, , \, 2c_1 + c_2 + 3c_3)$$

$$3c_1 + c_2 + 2c_3 = a$$
$$c_1 + 5c_3 = b$$
$$2c_1 + c_2 + 3c_3 = c$$

وهذه منظومة من المعادلات الخطية لها حل إذا كان محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي الصفر (نظرية)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -6 \neq \text{zero}$$

$\therefore$ النظام له حل.

$\therefore$ المجموعة S تولد $\mathbb{R}^3$ (spanning set of $\mathbb{R}^3$)

مثال ③: هل عناصر المجموعة $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ أولا حيث
$v_1 = (1,2,4)^t, v_2 = (2,1,3)^t, v_3 = (4,-1,1)^t$

الحل: نفرض متجه اختياري $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$
هذا العنصر الاختياري يمكن كتابته كتركيبة خطية من هذه المتجهات

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a = c_1 + 2c_2 + 4c_3$$
$$b = 2c_1 + c_2 - c_3$$
$$c = 4c_1 + 3c_2 + c_3$$

هذه منظومة معادلات خطية لها حل إذا كان $|A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \text{Zero}$$

بما أن $|A|=0$ فإن نظام المعادلات ليس له حل وبالتالي فإن المجموعة S لا تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال ④: هل عناصر المجموعة $S'=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,2,3)\}$ تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل:- إذا كان $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ متجه اختياري من المثال ① استطعنا كتابته كتركيبة خطية من المتجهات $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ على الصورة:-

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

يمكن إضافة $0(1,2,3)$ إلى هذه التركيبة على الصورة:-

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) + 0.(1,2,3)$$

$\therefore$ عناصر المجموعة S' تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال ⑤: هل عناصر المجموعة $S'=\{v_1,v_2\}$ تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الحل:-

نفرض أن $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ متجه اختياري في الفضاء المتجهي $\mathbb{R}^3$ ندرس هل يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر S' أو لا.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أو

$$(a,b,c) = c_1(0,1,0) + c_2(1,0,1)$$

$$0.c_1 + 1.c_2 = a$$
$$1.c_1 + 0c_2 = b$$
$$0c_1 + 1.c_2 = c$$

وهيا منظومة معادلات خطية نوجد حلها بالاختزال

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -R_1 + R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & c-a \end{array}\right]$$

نجد $Ran A < Rank(A|B)$ ∴ لا يوجد حل للمنظومة

∴ المجموعة S' لا تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال: ⑥ هل عناصر المجموعة $S' = \{v_1, v_2, v_3\}$ تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$

حيث $v_1 = (1,1,1)^t$, $v_2 = (1,1,0)^t$, $v_3 = (1,0,0)^t$

الحل: ليكن $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ متجه في الفضاء $\mathbb{R}^3$ ندرس هل يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر S' أولا.

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

طريقة (1)

$a = c_1 + c_2 + c_3$ ①

$b = c_1 + c_2$ ②

$\boxed{c = c_1}$ ③

من ③ $c = c_1$ نعوض في ②

$b - c = b - c_1 = c_2$

نعوض في ① $\boxed{c_2 = b - c}$

$a = \cancel{c_1} + b - \cancel{c} + c_3$

$\boxed{c_3 = a - b}$

طريقة (2)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \neq 0$$

يوجد حل للمنظومة إذاً

المجموعة تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

مثال: (7) هل المجموعة $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ = ك' تولد الفضاء $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ حيث

$V_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, V_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, V_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$

$V_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

الحل: نفرض $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\in M_{2\times2}$ متجه اختياري في $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

ندرس هل يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر ك' أو لا.

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1&c_2\\c_3&c_4\end{bmatrix}\rightarrow \begin{aligned}a&=c_1\\b&=c_2\\c&=c_3\\d&=c_4\end{aligned}$$

$\therefore$ يوجد حل للنظام بالتالي كتابة أي متجه اختياري من $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ كتركيبة خطية من عناصر ك'.

أي المجموعة ك' تولد الفضاء $M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

مثال: (8) هل المجموعة $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ = ك' تولد الفضاء P_n حيث $V_1=1, V_2=x, V_3=x^2, V_4=x^3 \dots V_n=x^n$

الحل: نفرض متجه اختياري في P_n وليكن

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_nx^n$ بحيث

$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n=c_1\cdot1+c_2x+c_3x^2+c_4x^4+\dots+c_{n+1}$

بمساواة المعاملات نجد أن:

$a_0=1, a_1=c_2, a_2=c_3, a_3=c_4, \dots, a_n=c_{n+1}$

$\therefore$ ك' تولد الفضاء $P_n(x)$.

نظرية :- إذا كانت $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ مجموعة منتهية من المتجهات في الفضاء الاتجاهي V فإن الفضاء المولد بواسطة S $(span(S))$ هو فضاء جزئي من V

مثال :- (8) هل عناصر المجموعة الآتية تولد فضاء المصفوفات المتماثلة من نوع 2×2 أم لا

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$$

الحل :-

نفرض متجه اختياري من فضاء المصفوفات المتماثلة من نوع 2×2 وليكن $\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}$ بحيث :

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1&c_3\\c_3&c_2\end{bmatrix}\rightarrow \begin{matrix}a=c_1\\b=c_3\\d=c_2\end{matrix}\Rightarrow$$ يوجد حل للمنظومة

$\therefore$ S تولد فضاء المصفوفات المتماثلة من نوع 2×2.

مثال :- (10) هل عناصر المجموعة $S=\{f_1,f_2,f_3\}$ تولد الفضاء P_2 حيث $f_1=1+x+x^2,\ f_2=1+2x+3x^2,\ f_3=1+x-x^2$

الحل :-

نفرض متجه اختياري $a_0+a_1x+a_2x^2\in P_2$ بحيث

$$a_0+a_1x+a_2x^2=c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$$

$$=c_1(1+x+x^2)+c_2(1+2x+3x^2)+c_3(1+x-x^2)$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2=(c_1+c_2+c_3)+(c_1+2c_2+c_3)x+(c_1+3c_2-c_3)x^2$$

بمساواة المعاملات للطرفين

$$C_1 + C_2 + C_3 = a_0$$ معامل الحد المطلوب

$$C_1 + 2C_2 + C_3 = a_1$$ معامل x

$$C_1 + 3C_2 - C_3 = a_2$$ معامل x^2

وهي منظومة معادلات خطية نوجد حلها بالاختزال

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 3 & -1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -R_1 + R_3]{R_2 \to -R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 2 & -2 & c-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & -1 & \frac{c-a}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \to -R_3 + R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & a - \frac{c-a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & b-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_2 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \frac{2a-c+a}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-a-c}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_3 + R_2]{R_1 \to -2R_3 + R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2b+a+c+\frac{2a-c+a}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2b-a-c}{2} + \frac{c-a}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-a-c}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2}a - 2b + \frac{1}{2}c \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2b-a-c}{2} \end{array}\right]$$

$$\therefore \; c_1 = \frac{5}{2}a - 2b + \frac{1}{2}c$$

$$c_2 = b - a \;, \quad c_3 = \frac{2b-a-c}{2}$$

يوجد حل وحيد للمنظومة إذاً تولد الفضاء P_2 .

الأساسيات والأبعاد
Bases and dimensions

في هذا الجزء نلقي الضوء على مجموعة جزئية من الفضاء الاتجاهي ذات أهمية كبرى في وصف الفضاء الاتجاهي تسمى أساسية Basis .

تعريف الأساس :-
Defi:- (Basis)

الأساسية لفضاء اتجاهي V هي مجموعة جزئية غير خالية من الفضاء V لها خاصيتان هما :-

١- مستقلة خطيًا   ٢- تولد الفضاء المتجهي V .

مثال :- ①

المجموعة $B=\{e_1, e_2\}$ حيث $e_1=(1,0)$ ، $e_2=(0,1)$ أساسية للفضاء $\mathbb{R}^2$ لانها تولد $\mathbb{R}^2$ وهي مجموعة مستقلة خطيًا

$\dim(\mathbb{R}^2)=2$

تعريف بعد الفضاء الاتجاهي Dimension of vector space :

بعد الفضاء الاتجاهي V هو عدد عناصر الاساسية في الفضاء V نرمز له بالرمز $\dim(V)$.

مثال ② : المجموعة $B=\{e_1, e_2, e_3\}$ حيث $e_1=(1,0,0)$ ، $e_2=(0,1,0)$ ، $e_3=(0,0,1)$ أساسية للفضاء $\mathbb{R}^3$ لانها تولد $\mathbb{R}^3$ و هي مجموعة مستقلة خطيًا لذلك

$$\dim(\mathbb{R}^3)=3$$

مثال ③ :- المجموعة $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ حيث $e_1=(1,0,0,\dots,0)$ ، $e_2=(0,1,\dots,0)$ ، ... ، $e_n=(0,0,\dots,1)$ أساسية للفضاء $\mathbb{R}^n$ لانها مجموعة مستقلة ومولدة للفضاء $\mathbb{R}^n$

$$\dim(\mathbb{R}^n)=n$$

مثال ④ المجموعة $B=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}$ أساسية لـ $M_{2\times1}(\mathbb{R})$.

لانها مستقلة خطيًا وتولد $M_{2\times1}$ ولذلك $(M_{2\times1})=2$

مثال ⑤ المجموعة $B=\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ حيث

$$V_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ V_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ V_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\ V_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

أساسية للفضاء $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ لانها مستقلة خطيًا وتولد الفضاء $M_{2\times2}$

لذلك $\dim(M_{2\times2})=4$

مثال ⑥ المجموعة $B=\{1,x,x^2\}$ أساسية لـ P_2.

لانها مستقلة خطيًا وتولد الفضاء P_2 لذلك $\dim(P_2)=3$

مثال ⑦ المجموعة $B=\{1,x,x^2,\dots,x^n\}$ أساسية لـ P_n.

لانها مستقلة خطيًا وتولد الفضاء P_n لذلك $\dim(P_n)=n+1$

مثال ⑧ هل المجموعة $B=\{(1,1,1),(2,-1,2),(-1,-1,2)\}$

تكون أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$ أو لا؟

الحل:

$$c_1(1,1,1)+c_2(2,-1,2)+c_3(-1,-1,2)=0$$

المجموعة B مستقلة خطيًا إذا كان $|A|\neq 0$.

$$\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-1&-1\\1&2&2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1&-1\\2&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&-1\\2&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=$$

$|A|=(-2+2)-(4+2)+(-2-1)=-9\neq 0$ $\therefore$ B مستقلة خطيًا ①

المجموعة B تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ إذا كان أى عنصر اختياري يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر B.

$$(a,b,c)=c_1(1,1,1)+c_2(2,-1,2)+c_3(-1,-1,2)$$
$$=(c_1+2c_2-c_3,\ c_1-c_2-c_3,\ c_1+2c_2+2c_3)$$

الحل:

$$c_1 + 2c_2 - c_3 = a$$
$$c_1 - c_2 - c_3 = b$$
$$c_1 + 2c_2 + 2c_3 = c$$

وهي منظومة معادلات خطية نوجد حلها بالاختزال

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to -R_1 + R_3]{R_2 \to -R_1 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -3 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 3 & c-a \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3/3]{R_2 \to \frac{R_2}{-3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c-a}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to -2R_2 + R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{-2a+2b}{3} + a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c-a}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2b+c}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{a-b}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c-a}{3} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{2b+c}{3} \\ c_2 = \frac{a-b}{3} \\ c_3 = \frac{c-a}{3} \end{array}$$

∴ يوجد حل للمنظومة بالتالي أي عنصر اختياري من $\mathbb{R}^3$ يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر B

∴ B تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$. ②

من ① و ② فإن B أساس لـ $\mathbb{R}^3$.

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

نظرية :- إذا كانت $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ أساسية الفضاء المتجه V فإن أي مجموعة جزئية من V تحتوي على أكثر من n من المتجهات تكون مرتبطة خطياً .

مثال :- المجموعة $\{(1,0),(0,1),(1,3)\}$ هي مجموعة مرتبطة خطياً في $\mathbb{R}^2$ لانها تحتوي على 3 عناصر و $\dim(\mathbb{R}^2)=2$

مثال :- $\left\{\begin{bmatrix}9&5\\7&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ هي مجموعة مرتبطة خطياً في $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ لانها تحتوي على 5 عناصر و $\dim(M_{2\times2})=4$.

مثال :- $\{1,x,x^2,3+5x+x^2\}$ هي مجموعة مرتبطة خطياً في P_n لانها تحتوي على 4 عناصر و $\dim(P_2)=3$

نظرية :- إذا كان $B_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $B_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ أساسيتين في فضاء اتجاهي V فإن $n=m$

مثال :- هل المجموعة $B=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ تمثل أساس لـ $\mathbb{R}^3$ أو لا ؟

الشرط الاول للاساس هو الاستقلال

$$c_1(1,1,1)+c_2(0,1,1)+c_3(0,0,1)=\vec{0}$$

$$(c_1,\ c_1+c_2,\ c_2+c_3)=(0,0,0)$$

$$c_1=0\ ,\quad c_1+c_2=0\ ,\quad c_2+c_3=0$$

$$\therefore\ c_1=c_2=c_3=0$$

$\therefore$ عناصر B مستقلة خطياً

الشرط الثاني للاساس هو التوليد لاي عنصر اختياري في $\mathbb{R}^3$

$$(a,b,c)=c_1(1,1,1)+c_2(0,1,1)+c_3(0,0,1)$$

$$(a,b,c)=(c_1,\ c_1+c_2,\ c_2+c_3)$$

$$\left.\begin{aligned}a&=c_1\\b&=c_1+c_2\\c&=c_2+c_3\end{aligned}\right\}\longrightarrow\begin{aligned}c_1&=a\\c_2&=b-a\\c_3&=c-b+a\end{aligned}$$

∴ أي متجه اختياري يمكن كتابته كتركيبة خطية من عناصر B إذاً B تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$.

ملاحظة: نلاحظ أن عدد عناصر $B = 3$ و $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

من عدد عناصر الأساس الاعتيادي لـ $\mathbb{R}^3 = 3$ حيث أن الأساس الاعتيادي لـ $\mathbb{R}^3$ هو $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

مثال ②: هل $B = \{(3,4),(1,1)\}$ تكون أساسية للفضاء $\mathbb{R}^2$؟ عبر عن $(1,2)$ كتركيبة خطية من عناصر B.

الحل: شرط الاستقلال

$$c_1v_1 + c_2v_2 = 0 \Rightarrow c_1(3,4) + c_2(1,1) = (0,0)$$

$$(3c_1 + c_2, 4c_1 + c_2) = (0,0)$$

$$3c_1 + c_2 = 0$$

$$4c_1 + c_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -4R_1 + R_2]{R_1 \to \frac{R_1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to -3R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

∴ المجموعة مستقلة خطياً ①

شرط التوليد

$$(a,b) = c_1(3,4) + c_2(1,1)$$

$$(a,b) = (3c_1 + c_2, 4c_1 + c_2)$$

$$3c_1 + c_2 = a$$

$$4c_1 + c_2 = b$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & a \\ 4 & 1 & b \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to -4R_1 + R_2]{R_1 \to \frac{R_1}{3}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{a}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{4a}{3} + b \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -3R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b-a \\ 0 & 1 & 4a-3b \end{array}\right] \longrightarrow \begin{matrix} c_1 = b-a \\ c_2 = 4a-3b \end{matrix} \quad ⊛$$

المجموعة تولد عناصر الفضاء $\mathbb{R}^2$ ②

∴ فهي أساسية لـ $\mathbb{R}^2$ ، ونلاحظ أن عدد

عناصر $B = 2$ لذلك $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$

وكذلك عدد عناصر الاساس الاعتيادي $\{(1,0),(0,1)\} = 2$

هذا يؤكد النظرية الاخيرة

الان نكتب $(1,2)$ كتركيبة خطية من عناصر B.

$$(1,2) = C_1(3,4) + C_2(1,1)$$

$$= (3C_1 + C_2 , 4C_1 + C_2)$$

$$3C_1 + C_2 = 1$$

$$4C_1 + C_2 = 2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{بالاختزال}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \end{array}$$

إذاً ،

$$(1,2) = 1.(3,4) + (-2)(1,1)$$

يمكن إيجاد C_1, C_2 مباشرة بالتعويض في ⊛ عن $a=1, b=2$

لان $(a,b) = (1,2)$

مثال ③ وضح أن $B = \{1-x , x-x^2 , 1+x^2\}$ تكون أساسية للفضاء P_2 وعبر عن $3+x+4x^2$ كتركيبة خطية لعناصر B

الشرط الاول للاساس هو الاستقلال

$$C_1(1-x) + C_2(x-x^2) + C_3(1+x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$

$C_1 + C_3 = 0$ معامل الحد المطلق

$-C_1 + C_2 = 0$ معامل x

$-C_2 + C_3 = 0$ معامل x^2

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

∴ عناصر B مستقلة خطياً

الشرط الثاني التوليد لأي عنصر اختياري في P_2 وليكن

$a_0+a_1x+a_2x^2$ هل يمكن كتابته كتركيبة خطية من

عناصر B أولا

$$a_0+a_1x+a_2x^2=c_1(1-x)+c_2(x-x^2)+c_3(1+x^2)$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2=(c_1+c_3)+(-c_1+c_2)x+(-c_2+c_3)x^2$$

بمساواة المعاملات

$$c_1+c_3=a_0$$

$$-c_1+c_2=a_1$$

$$-c_2+c_3=a_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ -1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 1 & a_2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & -1 & 1 & a_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 2 & a_1+a_2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to \frac{R_3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_1+a_2}{2} \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 \to -R_3+R_1 \\ R_2 \to -R_3+R_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-a_1-a_2}{2}+a_0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-a_1-a_2}{2}+a_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a_1+a_2}{2} \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1=\frac{-a_1-a_2+2a_0}{2}, \quad c_2=\frac{-a_1-a_2+2a_1}{2}=\frac{a_1-a_2}{2} \\ c_3=\frac{a_1+a_2}{2} \end{array}\right\} \circledast$$

∴ B تولد الفضاء P_2 وعدد عناصر B هو 3 $\dim(P_2)=2+1=3$

$$3+x+4x^2=c_1(1-x)+c_2(x-x^2)+c_3(1+x^2)$$

$$3+x+4x^2=a_0+a_1x+a_2x^2 \to a_0=3, \; a_1=1, \; a_2=4$$

نعوض في $\circledast$ نحصل على

$$c_1=\frac{1}{2}, \; c_2=\frac{-3}{2}, \; c_3=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \; 3+x+4x^2=\frac{1}{2}(1-x)-\frac{3}{2}(x-x^2)+\frac{5}{2}(1+x^2).$$

إذا كان $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ فضاء جزئي متجهي من الفضاء المتجهي $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ فأوجد أساسية للفضاء W

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & a \\ b & c \end{bmatrix} = a\, v_1 + b\, v_2 + c\, v_3$$

∴ أي متجه في W هو تركيبة خطية من

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهذه المجموعة مستقلة خطياً لأن

إذا كان $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_1 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

∴ المجموعة $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

هي أساسية للفضاء W المعطى.

(H.W) وضح أن $B = \{(2,-1), (4,-1)\}$ تكون أساسية للفضاء $\mathbb{R}^2$ ومعبر عن $(1,2)$ كتركيبة خطية لعناصر B.

$$(-1-\lambda)\left[-\lambda+\lambda^2-6\right]=0$$

$$-(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)=0$$

$$\cancel{\lambda^2}-\lambda-6+\lambda^3-\cancel{\lambda^2}-6\lambda=0$$

$$\lambda^3-7\lambda-6=0$$

وهي المعادلة المميزة للمصفوفة H

ومن نظرية كيلي هاملتون المصفوفة H تحقق معادلتها المميزة أي أن :

$$H^3-7H-6I=0 \quad \#$$

لإيجاد معكوس H

$$H^3-7H-6I=0$$

$$H^3-7H=6I$$

$$\frac{1}{6}(H^3-7H)=I$$

$$H.\frac{1}{6}(H^2-7I)=I$$

أو

$$\frac{1}{6}(H^3-7H)=HH^{-1}$$

$$\frac{1}{6}(H^2-7I)\frac{H}{H}=H^{-1}$$

$$\frac{1}{6}(H^2-7I)=H^{-1} \quad \#$$

واجب : تحقق من نظرية كيلي هاملتون للمصفوفة $M=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$ وأوجد M^{-1}.

الشيت السادس

ملحق الفضاءات 3

مصور أفريقيا

رياضة 2

الفضاءات - الملحق رقم 3

~~ملحق المحاضرة 4~~

اعداد : الأستاذة امل العيادي

[مع تمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح]

الاسم: ....

خريف 2021-2022

فضاء الدوال كثيرات الحدود
Space of polynomials

دالة كثيرة الحدود في متغير واحد وبمعاملات من أعداد حقيقية تعرف كما يلي :

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

حيث $a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_n \in \mathbb{R}$

العدد الصحيح الموجب n حيث $a_n \neq 0$ يسمى درجة كثيرة الحدود.

Notes :- الدالة الثابتة $p(x) = a_0$ دالة كثيرة حدود درجتها صفر

:- الدالة الصفرية $p(x) = 0$ دالة كثيرة حدود ولكن ليس لها درجة.

:- لكل عدد حقيقي موجب n تكون هناك مجموعة من الدوال كثيرات الحدود نرمز لها بالرمز P_n

$$P_0 = \{ a_0 : a_0 \in \mathbb{R} \}$$

$$P_1 = \{ a_0 + a_1 x : a_0 , a_1 \in \mathbb{R} \}$$

$$P_n = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n : a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_n \in \mathbb{R} \}$$

:- دالتي كثيرة الحدود p و q تكونان متساويتين إذا كان نطاقهما متساويًا و $p(x) = q(x)$ لكل x في النطاق

$$p(x) = q(x)$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$$

إذا كان $a_0 = b_0 , a_1 = b_1 , a_2 = b_2 , \dots , a_n = b_n$

Note (1)

عمليات الجمع والضرب الاعتيادية على كثيرات الحدود تعرف كالتالي:

إذا كانت $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

$q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$

① $p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$

② $k p(x) = k a_0 + k a_1 x + k a_2 x^2 + \cdots + k a_n x^n$

Note (2)

كثيرات الحدود من الدرجة n أقل أو تساوي n تحت عمليتي الجمع والضرب الاعتيادية تمثل فضاء متجهي Vector space لتوفر شروط الفضاء المتجهي العشرة.

إذا كان $p(x), q(x), r(x) \in P_n$ وكان $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ فإن

① $p(x) + q(x) \in P_n$

② $p(x) + q(x) = q(x) + p(x) \quad \forall p(x), q(x) \in P_n$

③ $[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$

④ $\exists\, 0(x) \in P_n(x) \ni 0 + p(x) = p(x)$ لكل $p(x) \in P_n(x)$

⑤ $\forall p(x) \in P_n(x) \quad \exists -p(x) \in P_n(x) \ni$

$p(x) + (-p(x)) = 0(x)$

⑥ $\alpha p(x) \in P_n(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ p(x) \in P_n(x)$

⑦ $\alpha [p(x) + q(x)] = \alpha p(x) + \alpha q(x)$

⑧ $(\alpha + \beta) p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$

⑨ $(\alpha \beta) p(x) = \alpha (\beta p(x))$

⑩ $\exists\, 1 \in \mathbb{R} \ni 1 \cdot p(x) = p(x)$

$\therefore P_n(x)$ تمثل فضاء متجهي تحت العمليتين الاعتياديتين.

مثال: وضح أن $W=\{a_0+a_1x^2 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ تكون فضاء متجهي جزئي من $P_2(x)$.

الحل: شروط الفضاء الجزئي هي:

① $r(x)+q(x) \in W \quad , \forall\, r(x), q(x) \in W$

② $\alpha r(x) \in W \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ r(x) \in W$

③ $0(x) \in W$ المتجه الصفري ∋ W

نتحقق من الشروط على W المعطاة

إذا كان $r(x), q(x) \in W \quad , \alpha \in \mathbb{R}$

① $r(x)+q(x) = a_0+a_1x^2+b_0+b_1x^2$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x^2$$
$\therefore r(x)+q(x) \in W$

② $\alpha r(x) = \alpha(a_0+a_1x^2) = \alpha a_0+\alpha a_1 x^2 \in W$

③ $0(x) = 0+0x^2 \in W$

$\therefore W$ فضاء متجهي جزئي من $P_2(x)$

واجب: وضح أن المجموعة $W=\{a_0-a_1x+2a_1x^2 ; a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء الاتجاهي $P_2(x)$.

مثال: وضح هل عناصر المجموعة الآتية مستقلة خطياً أم مرتبطة
$$\{1+x+x^2,\ 1+2x+3x^2,\ 1+x-x^2\}$$

الحل:
$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3=0$$
نوجد قيمة الثوابت c_1, c_2, c_3 التي تحدد ما إذا كانت المجموعة مرتبطة أم مستقلة

$$c_1(1+x+x^2)+c_2(1+2x+3x^2)+c_3(1+x-x^2)=0$$
بمساواة المعاملات

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0\\ c_1+2c_2+c_3&=0\\ c_1+3c_2-c_3&=0 \end{aligned}\right\}$$
نحل هذه المنظومة بالاختزال نجد
$c_1=c_2=c_3=0$

$\therefore$ المجموعة مستقلة خطياً

مثال: هل عناصر المجموعة $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ مستقلة خطيًا في P_n أم مرتبطة؟

الحل: $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_{n-1} + c_{n+1} v_n = 0$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1} + c_{n+1} x^n = 0$$

نوجد حل المنظومة بمساواة المعاملات نجد

$$c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = c_{n+1} = 0$$

∴ المجموعة مستقلة خطيًا

مثال: في المثال السابق هل عناصر المجموعة المعطى تولد الفضاء P_n؟

الحل: P_n هو فضاء كثيرات الحدود التي درجتها أقل من أو تساوي n على الشكل $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ أي أنها تركيبة خطية من عناصر المجموعة المعطاة في المثال السابق

∴ المجموعة $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ تولد الفضاء P_n.

مثال: هل $B = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ تمثل أساس الفضاء P_n؟

من المثال السابق B تولد الفضاء P_n

من المثال قبل السابق B مجموعة مستقلة خطيًا

فإن B تمثل أساس للفضاء P_n.

H.W هل عناصر المجموعة $S' = \{p(x), q(x), r(x)\}$ تولد الفضاء $P_2(x)$

حيث $r(x) = x+3,\ q(x) = x-2,\ p(x) = x^2+1$

Ex: إذا كانت $S=\{f_1, f_2, f_3\}$ مجموعة من المتجهات في $P_2(\mathbb{R})$ حيث

$f_1 = t^2+t+1$

$f_2 = 2t^2+t$

$f_3 = 3t^2+2t+1$

أثبت أن S غير مستقلة خطياً على $\mathbb{R}$ (أي مرتبطة)

Sol: إذا كانت $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0$

حيث $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ فإن:

$$c_1(t^2+t+1) + c_2(2t^2+t) + c_3(3t^2+2t+1) = 0$$

أو

$$(c_1+2c_2+3c_3)t^2 + (c_1+c_2+2c_3)t + (c_1+c_3) = 0$$

وهذا يعني معامل t^2 و t والحد المطلق = صفر

$$c_1+2c_2+3c_3 = 0$$
$$c_1+c_2+2c_3 = 0$$
$$c_1+c_3 = 0$$

نحل هذه المنظومة الخطية المتجانسة بالاختزال

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to -r_1+r_3]{r_2 \to -r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to -\frac{1}{2}r_3]{r_2 \to -r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to -2r_2+r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} c_1 + c_3 = 0 \rightarrow c_1 = -c_3 \\ c_2 + c_3 = 0 \rightarrow c_2 = -c_3 \end{matrix}$$

بوضع $c_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$

$c_1 = -c_3 = -t$

$c_2 = -c_3 = -t$

الحل هو:

$$\therefore \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} , t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore$ S غير مستقلة خطياً على $\mathbb{R}$

S is linearly dependent

Note:-

بما أن المجموعة في المثال السابق غير مستقلة أي أنها مرتبطة إذاً يمكن كتابة أحد عناصرها كتركيبة خطية من باقي العناصر

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 = 0 \quad (*)$$

بوضع $c_3 = 1 \rightarrow c_1 = c_2 = -1$

نعوض في $(*)$ نحصل على

$$-f_1 - f_2 + f_3 = 0$$

$\Longrightarrow \begin{cases} -f_2 + f_3 = f_1 \rightarrow f_1 \text{ تركيبة خطية من } f_2 , f_3 \\ -f_1 + f_3 = f_2 \rightarrow f_2 \text{ تركيبة خطية من } f_1 , f_3 \\ +f_1 + f_2 = f_3 \rightarrow f_3 \text{ تركيبة خطية من } f_1 , f_2 \end{cases}$

Ex:- أوجد أساساً للفضاء الجزئي P من $P_2(\mathbb{R})$ حيث
$P=\{a+bx+cx^2 : a+b-c=0\}$ وأوجد بعده.

Sol:- بما أن $a+b-c=0 \Rightarrow a=c-b$

بأخذ $b=t\ ,\ c=s$ فإن:
$a=s-t$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-t \\ t \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = sv_1 + tv_2$$

حيث $v_1=(1,0,1)$, $v_2=(-1,1,0)$ هذا يعني أن:

$$S=\{1+x^2, -1+x\}$$

تولد P.

يمكن إثبات أن S مستقلة خطياً على $\mathbb{R}$.

$$c_1v_1+c_2v_2=0$$
$$c_1(1+x^2)+c_2(-1+x)=0$$
$$c_1+c_1x^2-c_2-c_2x=0$$
$$(c_1-c_2)-c_2x+c_1x^2=0$$

$$\left.\begin{array}{l} c_1-c_2=0 \\ -c_2=0 \\ c_1=0 \end{array}\right\} \longrightarrow c_1=c_2=0$$

$\therefore$ S مستقلة خطياً.

$\therefore$ S أساس للفضاء P المعطى وبعده $=2$.

(H.W)

(1) أي من المجموعات التالية تكون مجموعة مولدة للفضاء المتجه $P_2(\mathbb{R})$ على المجال $\mathbb{R}$؟

ⓐ $\{-1, 1+x, -2x^2\}$

ⓑ $\{\sqrt{2}, \frac{1}{2}x, x+x^2\}$

(2) وضح أن $B = \{1-x, x-x^2, 1+x^2\}$ تكون أساس للفضاء P_2 وعبر عن $3+x+4x^2$ كتركيبة خطية لعناصر B.

مثال: بين هل المجموعة الجزئية التالية من فضاء المتجهات $P_2(IR)$ مرتبطة أم مستقلة خطياً

$$S=\{1+x,\ x-x^2,\ -2+x^3,\ 3\}$$

الحل:

نفرض أن $c_1, c_2, c_3, c_4 \in IR$

$$c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4=0$$

$$c_1(1+x)+c_2(x-x^2)+c_3(-2+x^3)+c_4\,3=0$$

$$(c_1-2c_3+3c_4)+(c_1+c_2)x+(-c_2)x^2+(c_3)x^3=0$$

بمساواة المعاملات الطرفين

$c_1-2c_3+3c_4=0$ ①

$c_1+c_2=0 \longrightarrow c_1=c_2$ ②

$-c_2=0$ ③

$c_3=0$ ④

من ③ و ④ $c_2=c_3=0 \xrightarrow{\text{من } ②} c_1=0 \xrightarrow{\text{من } ①} c_4=0$

$\therefore\ c_1=c_2=c_3=c_4=0$

$\therefore$ عناصر المجموعة S مستقلة خطياً.

واجب: بين هل عناصر المجموعة التالية من فضاء المتجهات $P_2(IR)$ مرتبطة أم مستقلة خطياً

$$S'=\{5+x,\ x-x^2,\ -3+x^2,\ 7\}$$

واجب: وضح هل المجموعة التالية مستقلة أم مرتبطة خطياً في $P_3(x)$

$f(x)=x^2+x\ ,\ g(x)=x+2\ ,\ k(x)=x^3$

$h(x)=3x^2+2x-2$.

مثال: حدد ما إذا كانت كثيرات الحدود التالية تنشئ الفضاء الخطي P_2 :

$$P_1 = 1 + 2x - x^2 \ , \ P_2 = 3 + x^2$$
$$P_3 = 5 + 4x - x^2 \ , \ P_4 = -2 + 2x - 2x^2$$

الحل:

إذا كانت $a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2(x)$ نتحقق من أنه يمكن كتابته كتركيبة خطية من الحدوديات المعطاة

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = k_1P_1 + k_2P_2 + k_3P_3 + k_4P_4$$

$$= k_1(1+2x-x^2) + k_2(3+x^2) + k_3(5+4x-x^2) + k_4(-2+2x-2x^2)$$

بمساواة المعاملات

الحد المطلق $a_0 = k_1 + 3k_2 + 5k_3 - 2k_4$

معامل x للطرفين $a_1 = 2k_1 + 4k_3 + 2k_4$

معامل x^2 للطرفين $a_2 = -k_1 + k_2 - k_3 - 2k_4$

نوجد حل هذه المنظومة الخطية بالاختزال

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & a_0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & a_1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & a_2 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & a_0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \end{array}\right]$$

نلاحظ أن $Rank(A) < Rank(A|B)$

$\therefore$ لا يوجد حل للمنظومة

هذا يعني لا يمكن كتابة الحدودية $a_0 + a_1x + a_2x^2$ كتركيبة خطية من الحدوديات المعطاة فإنها لا تنشئ الفضاء الخطي P_2 .

الاستقطار

Diagonalization

تماثل مصفوفتان :- Similar matrices

المصفوفتان المربعتان A و B متماثلتان إذا وجدت مصفوفة غير شاذة (Invertable) P بحيث $B = P^{-1}AP$

الخواص :-

1. $|A| = |P^{-1}AP|$
2. A قابلة للانعكاس $\Longleftrightarrow$ $P^{-1}AP$ قابلة للانعكاس

   A غير شاذة $\Longleftrightarrow$ $P^{-1}AP$ غير شاذة
3. $Ran(A) = Ran(P^{-1}AP)$
4. A , $P^{-1}AP$ لهما نفس الحدودية المميزة.
5. A , $P^{-1}AP$ لهما نفس القيم الذاتية.
6. إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ A فإنها قيمة ذاتية لـ $P^{-1}AP$
7. الفضاء الذاتي لـ A المناظر لـ λ والفضاء الذاتي لـ $P^{-1}AP$ المناظر لـ λ لهما نفس البعد.

تعريف الاستقطار (قابلة التقطير) :-

المصفوفة المربعة A قابلة الاستقطار إذا كانت متماثلة (مشابهة) لمصفوفة قطرية، هذا يعني إذا وجدت مصفوفة قابلة للانعكاس P بحيث $P^{-1}AP$ تكون مصفوفة قطرية

في هذه الحالة المصفوفة P تقطر A

نظرية :- (1)

إذا كانت $A_{n\times n}$ فإن الجمل التالية متكافئة :-

(a) A is diagonalizable قابلة للتقطير

(b) A has (n) linearly independent eigenvectors

A لها n من المتجهات الذاتية مستقلة خطياً

نظرية :- (2)

إذا كانت $A \in M(F)$ فإن A قابلة للقطرية إذا وإذا كان فقط $A^{n\times n}$ لـ A لها متجهات ذاتية تكون أساس للفضاء المتجه F^n.

نتيجة :-

إذا كانت A مصفوفة قابلة للتقطير و $W(\lambda)$ هو الفضاء الذاتي المناظر للقيمة الذاتية λ فإن قوة أس $(x-\lambda)$ كعامل لمتعددة الحدود المميزة للمصفوفة A يساوي $\dim W(\lambda)$.

مثال: اسقطر المصفوفة الآتية :-
وأوجد بعد كل فضاء ذاتي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :-

أولاً نوجد القيم الذاتية للمصفوفة A من المعادلة المميزة $|A-\lambda I| = 0$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 1$$

ثانياً نوجد المتجهات الذاتية المناظرة لكل قيمة ذاتية

$\lambda_1 = 2$ نوجد x_1 المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_1 = 2$

$$(A-\lambda_1 I)x_1 = (A-2I)x_1 = 0 \qquad ; \quad x_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$0y_1 + 1y_2 = 0 \longrightarrow y_2 = 0$$

$$0y_1 + 0y_2 = 0 \longrightarrow y_1 = t \quad , t \in \mathbb{R}$$

$$x_1=\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}=\left\{t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$$

أو $W(\lambda=2)=\{(t,0)=t(1,0);\ t\in\mathbb{R}\}$

$W(\lambda=2)$ وهو الفضاء الذاتي المناظر لـ $\lambda=2$.

$(x-2)$ قوته واحد كعامل لمتعددة الحدود المميزة للمصفوفة A يساوي $\dim(W(\lambda=2))$

أي أن $\dim(W(\lambda=2))$ بعد الفضاء الذاتي المناظر لـ $\lambda=2$ يساوي واحد لأن أساسه هو

$B_{\lambda=2}=\{(1,0)\}$ يحتوي على متجه واحد

$\lambda_2=1$ نوجد x_2 المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_2=1$

$$(A-\lambda_2 I)x_2=(A-I)x_2=0\ ;\ x_2=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 \\ 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\longrightarrow y_1+y_2=0\Rightarrow y_1=-y_2$$

$$\therefore x_2=\begin{bmatrix} -y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix}=\left\{t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t\in\mathbb{R}\right\}$$

أو $W(\lambda=1)=\{(-t,t)=t(-1,1);\ t\in\mathbb{R}\}$

$W(\lambda=1)$ هو الفضاء الذاتي المناظر لـ $\lambda=1$.

$(x-1)$ قوته واحد كعامل لمتعددة الحدود المميزة للمصفوفة A يساوي $\dim(W(\lambda=1))$

أي أن $\dim(W(\lambda=1))$ بعد الفضاء الذاتي المناظر لـ $\lambda=1$ يساوي واحد لأن أساسه هو

$B_{\lambda=1}=\{(-1,1)\}$ يحتوي على متجه واحد.

بما أن المتجهات الذاتية مستقلة خطياً فإنها تكون مصفوفة P غير شاذة بحيث $P^{-1}AP = D$
حيث مصفوفة قطرية عناصر القطر الرئيسي هي القيم الذاتية.

نأخذ $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ هو المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_1 = 2$

$P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ هو المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_2 = 1$

فتكون P_1 ، P_2 هي أعمدة المصفوفة P التي تستقطر A

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

للتحقيق:

نوجد P^{-1} ثم نوجد $P^{-1}AP$

$$P^{-1} = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore P^{-1}AP = D$$

Ex(1):- مثال: أوجد مصفوفة P التي تقطر المصفوفة A.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

sol:- المعادلة المميزة للمصفوفة A هي $(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$

نوجد أساسات الفضاء الذاتي:

$\lambda=1 \longrightarrow P_1=\begin{bmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

$\lambda=2 \longrightarrow P_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} , P_3=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

∴ توجد 3 متجهات أساسية لذلك المصفوفة P هي

$$P=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ (P تقطر A)

للتحقيق:

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ex(2) مثال (2) حول المصفوفة الآتية إلى مصفوفة قطرية:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

الحل: - نوجد القيم الذاتية أولاً (من المعادلة المميزة):

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-1\right] + \left[-(3-\lambda)\right] = 0$$

$$-(3-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-1-1\right] = 0$$

$$= (3-\lambda)\left[(2-\lambda)(3-\lambda)-2\right]$$

$$\left[6-5\lambda+\lambda^2-2\right]$$

$$= (3-\lambda)\left[\lambda^2-5\lambda+4\right]$$

$$= (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 1$$

نوجد المتجهات الذاتية المناظرة لكل قيمة ذاتية.

$$(A-\lambda I)\vec{x} = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{x_1} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_3 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_1]{R_1 \to -R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} y_1 = -y_3 \\ y_2 = 0 \end{matrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} -y_3 \\ 0 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda_2 = 4$

$$(A - \lambda_2 I)\vec{x}_2 = 0 \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -R_3]{R_1 \to -R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2 \to -R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} y_1 + y_2 = 0 \to y_1 = -y_2 \\ y_2 + y_3 = 0 \to y_2 = -y_3 \end{matrix}$$

$$\therefore X_2 = \begin{bmatrix} y_3 \\ -y_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda_3 = 1$

$$(A - \lambda_3 I) X_3 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{R_2 \to -R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 - y_3 = 0 \longrightarrow y_1 = y_3$$

$$y_2 - 2y_3 = 0 \longrightarrow y_2 = 2y_3$$

$$\therefore X_3 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_3 \\ 2y_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

نوجد P^{-1} ونتحقق من أن : $P^{-1}AP = D$

حيث $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$-2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 - 2 = \boxed{-6}$$

لو متشابهات ، لو المحدد = صفر غير قابلة
لو ≠ صفر قابلة لان في P^{-1}

نظرية: إذا كانت $A \in M_{n\times n}(F)$ ولها n من القيم الذاتية المختلفة فإن A قابلة للقطرية.

مثال: أثبت أن المصفوفة الآتية قابلة للقطرية وأوجد مصفوفة غير شاذة P بحيث $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

نوجد المحدد بالفك باستخدام الصف الثالث

$$|A-\lambda I| = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -8 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(-2-\lambda)(4-\lambda)+8\right] = 0$$

$$(1-\lambda)\left[-8+2\lambda-4\lambda+\lambda^2+8\right] = 0$$

$$(1-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda\right] = 0$$

$$(1-\lambda)\lambda(\lambda-2) = 0$$

إذاً القيم الذاتية للمصفوفة المعطاة هي:

$$\lambda_1 = 0 \,,\; \lambda_2 = 1 \,,\; \lambda_3 = 2$$

بما أن القيم الذاتية مختلفة فإن A قابلة للقطرية من النظرية السابقة.

الآن نوجد المتجهات الذاتية المناظرة لكل قيمة ذاتية والفضاء الذاتي المناظر لها ومن ثم الاساس والبعد

$\lambda_1=0$ نوجد X_1 المتجه الذاتي المناظر لها

$$(A-\lambda_1 I)x_1=(A-0I)x_1=0$$

$$=Ax_1=0$$

$$\begin{bmatrix}-2&-8&-12\\1&4&4\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&4&4\\-2&-8&-12\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to 2R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&4&4\\0&0&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix}1&4&4\\0&0&1\\0&0&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to 4R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&4&4\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to -4R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow y_1+4y_2=0\rightarrow y_1=-4y_2$$

$$y_3=0$$

$$\therefore x_1=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4y_2\\y_2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4t\\t\\0\end{bmatrix}=\left\{t\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix},t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\therefore W(\lambda=0)=\{t(-4,1,0);t\in\mathbb{R}\}$$

$$\dim W(\lambda=0)=1$$

$$B_{\lambda=0}=\{(-4,1,0)\}$$

$\lambda_2=1$ نوجد المتجه x_2 الذاتي المناظر لـ $\lambda_2=1$

$$(A-\lambda_2 I)x_2=(A-1I)x_2=0$$

$$\begin{bmatrix} -2-1 & -8 & -12 \\ 1 & 4-1 & 4 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -3 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xrightarrow{R_2 \to 3R_1+R_2}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -3R_2+R_1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1+4y_3=0 \longrightarrow y_1=-4y_3=-4t,\ y_3=t,\ t\in\mathbb{R}$$

$$y_2=0 \longrightarrow$$

$$\therefore x_2=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}=\left\{t\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$w(\lambda=1)=\{t(-4,0,1);\ t\in\mathbb{R}\}$$

$$\dim w(\lambda=1)=1$$

$$B_{\lambda=1}=\{(-4,0,1)\}$$

$\lambda_3 = 2$ نوجد المتجه X_3 الذاتي المناظر لـ $\lambda_3 = 2$

$$(A-\lambda_3 I)x_3 = (A-2I)x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2-2 & -8 & -12 \\ 1 & 4-2 & 4 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ $R_2 \to 4R_1 + R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$R_3 \leftrightarrow R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ $R_3 \to 4R_2 + R_3$, $R_2 \to -R_2$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$R_1 \to -4R_2 + R_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y_1 + 2y_2 = 0 \Longrightarrow y_1 = -2y_2 = -2t, \quad y_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$y_3 = 0$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \left\{ t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W(\lambda = 2) = \{ t(-2, 1, 0) ; t \in \mathbb{R} \}$$

$\dim W(\lambda = 2) = 1$ $\qquad B_{\lambda=2} = \{(-2, 1, 0)\}$

المتجهات الذاتية التي تكون أساس للفضاءات الذاتية هي متجهات مستقلة خطياً منها تكون أعمدة المصفوفة P التي تستقطر المصفوفة المعطاة

$$P_1=\begin{bmatrix}-4\\1\\0\end{bmatrix},\quad P_2=\begin{bmatrix}-4\\0\\1\end{bmatrix},\quad P_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-4&-4&-2\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

التحقيق نوجد P^{-1} ثم نتحقق من أن :

$$P^{-1}AP=D=\begin{bmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

التحويلات الخطية

Linear Transformations

تعريف :- إذا كان كل من V و W فضاءً متجهاً على مجال F نقول أن $T:V \to W$ تحويل خطي إذا كان

① $\forall u, v \in V \quad T(u+v) = T(u) + T(v)$

② $\forall u \in V, \alpha \in F \quad T(\alpha u) = \alpha T(u)$

مثال :- (1) إذا كان $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ معرفاً بواسطة العلاقة

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$$

أثبت أن T تحويل خطي.

الحل :- نفرض أن $u = (x_1, x_2, x_3)$ ، $v = (y_1, y_2, y_3)$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن

$$T(u+v) = T(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) =$$
$$= (x_1+y_1+x_2+y_2, x_3+y_3) =$$
$$= (x_1+x_2, x_3) + (y_1+y_2, y_3) =$$
$$= T(u) + T(v)$$

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_3)$$
$$= \alpha(x_1+x_2, x_3) = \alpha T(u)$$

$\therefore T$ تحويل خطي.

مثال :- (2) إذا كان $V = M_{m\times k}(\mathbb{R})$ ، $W = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ وإذا كانت B مصفوفة $k\times n$ فإن $T: V \to W$ المعرف بواسطة $T(A) = AB$ لجميع $A \in V$ يمثل تحويل خطي

الحل :- إذا كان $A, C \in V$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ فإن

$$T(A+C) = (A+C)B = AB + CB = T(A) + T(C)$$
$$T(\alpha A) = (\alpha A)B = \alpha(AB) = \alpha T(A)$$

$\therefore T$ تحويل خطي

مثال ③ :- إذا كان $V=W=\mathbb{R}$ ، $T:V\to W$ معرف بواسطة $T(x)=\frac{x}{10}$ هل T تحويل خطي؟

الحل :-

إذا كان $x,y\in\mathbb{R}$ فإن

$$T(x+y)=\frac{x+y}{10}=\frac{x}{10}+\frac{y}{10}=T(x)+T(y)$$

لكل $\alpha\in\mathbb{R}$ فإن

$$T(\alpha x)=\frac{\alpha x}{10}=\alpha\left(\frac{x}{10}\right)=\alpha T(x)$$

$\therefore$ T تحويل خطي

مثال ④ :- إذا كان $V=P_2(\mathbb{R})$ ، $W=P_3(\mathbb{R})$ ، $T:V\to W$ معرف بواسطة $T(f)=xf$ هل T تحويل خطي؟

الحل :-

إذا كان $f,g\in V$ فإن

$$T(f+g)=x(f+g)=xf+xg=T(f)+T(g)$$

لكل $\alpha\in\mathbb{R}$

$$T(\alpha f)=x(\alpha f)=\alpha(xf)=\alpha T(f)$$

$\therefore$ T تحويل خطي

مثال ⑤ :-

إذا كان $V=\mathbb{R}^2$ ، $W=\mathbb{R}$ ، $T:V\to W$ معرف بواسطة :-

$T((x,y))=xy$ هل T تحويل خطي؟ حل مادي

الحل :-

ليش تحويل خطي بالعكس

إذا كان $u=(1,3)$ ، $v=(0,1)$ فإن

$$T(u+v)=T(1,4)=4$$

ولكن $T(u)=3$ ، $T(v)=0$

أي أن $T(u+v)\neq T(u)+T(v)$

$\therefore$ T لا يمثل تحويل خطي

نظرية (1): إذا كان كل من V و W فضاءً متجهاً على مجال F فإن $T:V\to W$ تحويل خطي إذا وإذا كان فقط $T(\alpha u+v)=\alpha T(u)+T(v)$ لجميع $u, v \in V$ لجميع $\alpha \in F$.

شرط أساسي

نظرية (2): إذا كان $T:V\to W$ تحويلاً خطياً فإن $T(O_V)=O_W$ حيث O_V هو المتجه الصفري في الفضاء V ، O_W هو المتجه الصفري في الفضاء W.

مثال: إذا كان $V=\mathbb{R}^3$ ، $W=\mathbb{R}^2$ ، $T:V\to W$ معرف بواسطة العلاقة $T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2, x_3+1)$ هل T يمثل تحويل خطي؟

ليس تحويل خطي

الحل: $T(O_V)=T(0,0,0)=(0,1)\neq O_W$

$\therefore$ T لا يمثل تحويل خطي

تعريف: نواة التحويل الخطي والفضاء الصوري

إذا كان كل من V ، W فضاءً متجهاً على مجال F ، $T:V\to W$ تحويل خطي فإن نواة T يرمز لها بالرمز $\ker T$ وتعرف كالآتي:

$$\ker T=\{u\in V ; T(u)=O_W\}$$

أما صورة V في W أو الفضاء الصوري فيرمز له بالرمز $\operatorname{Im} T$ ويعرف كالآتي:

$$\operatorname{Im} T=\{T(u) : u\in V\}$$

من تعريف $\ker T$ و $\operatorname{Im} T$ نلاحظ أن $\ker T$ هي مجموعة جزئية من V ، $\operatorname{Im} T$ هي مجموعة جزئية من W. وكلاً من $\ker T$ ، $\operatorname{Im} T$ تمثل فضاءً متجهي جزئي من V ، W على الترتيب.

مثال :- إذا كان $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ تحويلاً خطياً معرفاً بواسطة العلاقة $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3)$ أوجد $\ker T$ ، $\operatorname{Im} T$ وأساس كل منهما

الحل :-

إذا كان $u = (x_1, x_2, x_3) \in \ker T$ فإن

$$T(u) = T(x_1, 0, x_3) = (0, 0, 0)$$

أي أن $x_1 = x_3 = 0$

إذن $\ker T = \{(0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$

لاحظ أن

$$\ker T = \{x(0,1,0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$\therefore$ $\{(0,1,0)\}$ أساس لنواة T

إذا كان $w = (y_1, y_2, y_3) \in \operatorname{Im} T$ فإنه يوجد $u \in \mathbb{R}^3$ ، وليكن $u = (x_1, x_2, x_3)$ بحيث $T(u) = w$

أي أن $w = (y_1, y_2, y_3) = (x_1, 0, x_3)$ ومنها نستنتج أن $y_1 = x_1$ ، $y_2 = 0$ ، $y_3 = x_3$

إذاً

$$\operatorname{Im} T = \{(x, 0, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

$$\operatorname{Im} T = \{(x,0,0) + (0,0,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,0,0) + y(0,0,1) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

إذاً $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ أساس للفضاء الصوري $\operatorname{Im} T$

تعريف: إذا كان كل من V و W فضاء ذو بعد منتهٍ على مجال F و $T: V \to W$ فإن:

صفرية T (Nulity T)

ورتبة T (Rank T)

تعرفان كالآتي:

dimension of T

$$\text{Nulity}\,T = \dim(\ker T)$$

$$\text{Rank}\,T = \dim(\text{Im}\,T)$$

مثال: إذا كان $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ تحويلاً خطياً معرفاً بواسطة العلاقة $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3)$ أوجد $\text{rank}\,T$ ، $\text{Nulity}\,T$

الحل:

إذا كان $u = (x_1, x_2, x_3) \in \ker T$ فإن

$$T(u) = T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$$

أي أن

$$x_3 = 0 \;,\; x_1 + x_2 = 0$$

$$x_3 = 0 \;,\; x_1 = -x_2$$

إذن

$$\ker T = \{(x, -x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1, -1, 0) : x \in \mathbb{R}\} \quad \langle\langle (1, -1, 0) \rangle\rangle$$

$$\text{Nulity}\,T = \dim(\ker T) = 1$$

إذا كان $w = (y_1, y_2) \in \text{Im}\,T$ فإنه يوجد u

بحيث $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ، $T(u) = w$

$$T(u) = T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3) = (y_1, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2)(1, 0) + x_3(0, 1)$$

$$(0, 1), (1, 0) \in \text{Im}\,T$$

$$\text{rank}\,T = 2$$

28

(H.W)

1- هل التحويل $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بـ:

$$T(x, y, z, t) = (x-y+z+t\,,\; x+2z+t\,,\; x+y+3z-3t)$$

تحويل خطي أو لا؟

2- هل التحويل $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ المعرف بـ

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1+x_2, x_4, 0)$$

تحويل خطي أم لا؟

3- هل التحويل $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ المعرف بـ

$$T(x, y) = (2x+1, y-2)$$

تحويل خطي أم لا؟

4- إذا كان $T: M_{2\times 2} \to P_2$ تحويلاً خطياً معرفاً كما يلي:

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (b-c)x + ax^2$$

أوجد $\ker T$, $\text{Nulity}\, T$

أوجد $\text{Im}\, T$, $\text{Rank}\, T$

5- إذا كان $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ تحويلاً خطياً معرف بواسطة العلاقة

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2, x_3+x_4)$ أوجد

$\ker T$, $\text{Nulity}\, T$

$\text{Im}\, T$, $\text{Rank}\, T$

6- إذا كان $V = W = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $T: V \to W$

معرف بواسطة العلاقة $T(A) = AB$

أوجد ① أساس لكل من $\ker T$, $\text{Im}\, T$

أوجد ② Nulity , $\text{Rank}\, T$

س- تحقق من نظرية كيلي هاملتون للمصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix}$$

ثم أوجد المعكوس A^{-1}

الحل :- نوجد المعادلة المميزة $P(\lambda)=0$

$$|A-\lambda I|=0$$

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&2&1\\1&3-\lambda&1\\1&2&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\3-\lambda&1\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda)-2\right]-\left[2(2-\lambda)-2\right]+\left[2-(3-\lambda)\right]=$$

$$(2-\lambda)\left[6-5\lambda+\lambda^2-2\right]-\left[4-2\lambda-2\right]+\left[-1+\lambda\right]=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4)-(2-2\lambda)-1+\lambda=0$$

$$2\lambda^2-10\lambda+8-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda-2+2\lambda-1+\lambda=0$$

$$\therefore -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0$$

$$P(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$$

هذه هي المعادلة المميزة لـ A و A تحقق معادلتها المميزة

$$P(A)=0$$

أي أن $A^3-7A^2+11A-5I=0$

نتحقق من ذلك ثم نوجد A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix}$$

نعوض في المعادلة المميزة بـ A

$$A^3 - 7A^2 + 11A - 5I \overset{?}{=} 0$$

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{?}{=}$$

المصفوفة الصفرية

بالجمع والطرح نجد يساوي المصفوفة الصفرية

الآن نوجد A^{-1} من المعادلة المميزة

$$A^3 - 7A^2 + 11A - 5I = 0$$

$$A^3 - 7A^2 + 11A = 5I$$

$$\frac{A^3 - 7A^2 + 11A}{5} = I$$

$$A\left(\frac{A^2 - 7A + 11I}{5}\right) = I = AA^{-1}$$

$$\frac{A^2-7A+11I}{5} = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{A^2-7A+11I}{5}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7-14+11 & 12-14+0 & 6-7+0 \\ 6-7+0 & 13-21+11 & 6-7+0 \\ 6-7+0 & 12-14+0 & 7-14+11 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(H.W)

حول المصفوفة الاتية إلى الشكل القطري :-

① $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ② $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

③ $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

أحسنت صنعا بوصولك لهنا ^^

انتهى.