

تصميم الدوائر المنطقية

ITGS 126

المحاضرة الثانية

التبسيط باستخدام خرائط كارنوف

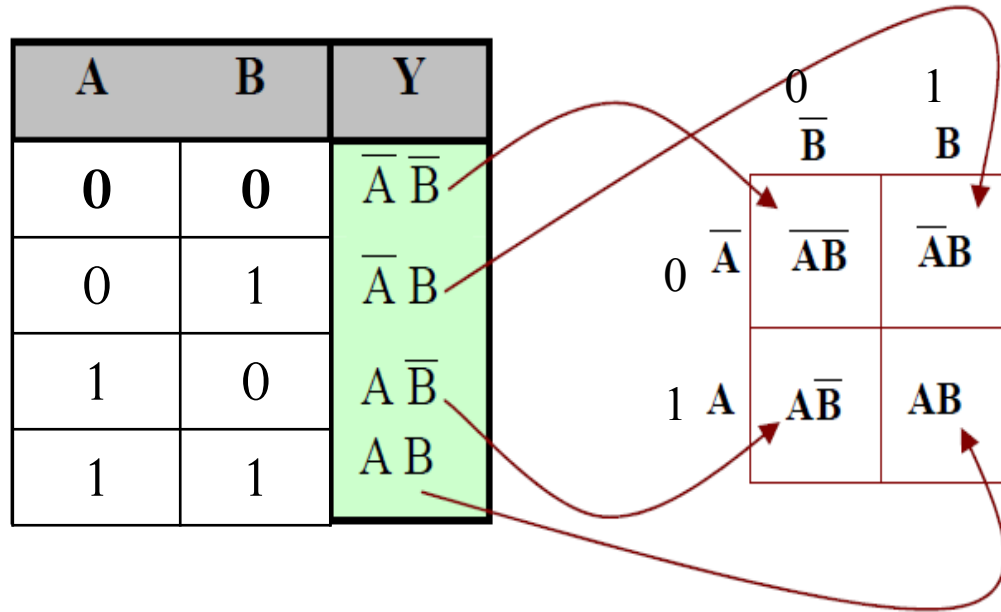
أ. منار سامي عريف

خرائط كارنوف Karnaugh Maps

- هو عبارة عن طريقة أخرى للتعبير عن المعلومات الموجودة في جدول الصدق أو يمكن اعتبارها صيغة مختلفة لجدول الحقيقة.
- والهدف من استخدام المخطط هو تسهيل عملية اكتشاف التشابهات ما بين الحدود و جمع الحدود المتشابهة.
- عدد مربعاتها 2^n حيث n عدد المتغيرات .
- كل مربع يمثل حد أصغر
- كل مربعين متجاورين يختلفان في متغير واحد فقط.
- المربعات المتجاورة (أفقياً أو عمودياً فقط) يمكن دمجها في صورة أبسط بشرط أن يكون عددها 2 أو 4 أو 8
- بحيث يتم استبعاد المتغير المتذبذب

عدد الخلايا في خريطة كارنوف يعتمد على عدد المتغيرات (المدخلات)

1- **خريطة كارنوف لمتغيرين** : لوكان هناك متغيرين هما (A,B) فإن خريطة كارنوف تحتوي فقط على أربعة احتمالات (00,01,10,11) وبالتالي لهما أربع مربعات وكل مربع منها يمثل حد من حواصل الضرب الأربعة كالتالي :



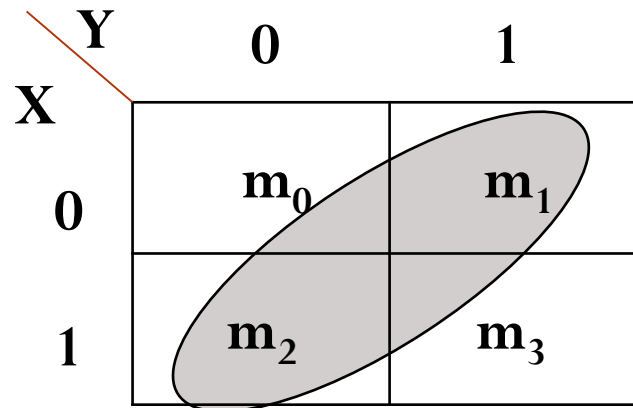
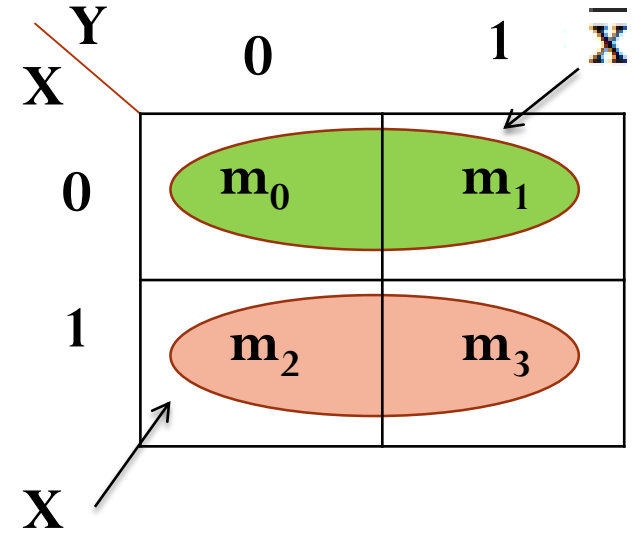
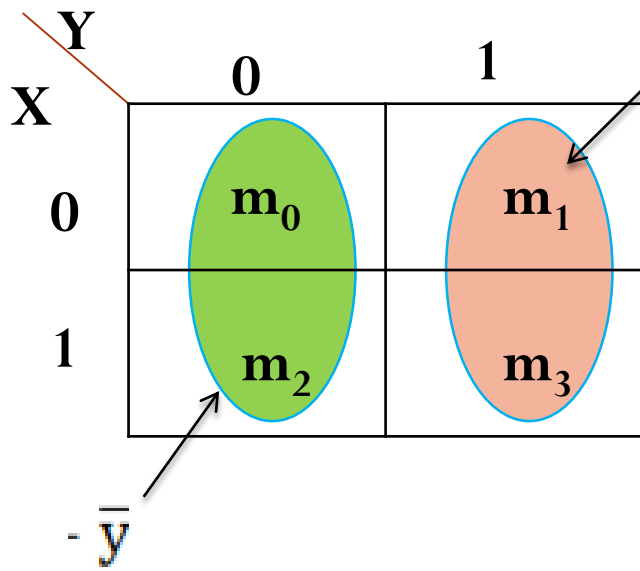
يتم تمثيل المتغير بإحتمالية 0 و 1 رأسياً وأفقياً .

أ.منار سامي عريف لاحظ أن المتغير A يظهر مكماً في الصف 0 وغير مكمل في الصف 1

خطوات تمثيل دالة ذات متغيرين في خريطة كارنوف

- 1- نرسم الخريطة والتي تحتوي على أربعة مربعات تمثل جميع الاحتمالات الممكنة لمتغيرات الدخل A, B
- 2- وضع واحد في كل مربع ينتمي للدالة.
- 3- تجميع كل مربعين متجاورين أفقياً أو رأسياً حيث يحتوي كل منهما على واحد.
- 4- تبسيط المربعات المتجاورة إلى متغيرات ثابتة

طرق دمج المربعات لمتغيرين في خرائط كارنوف :



لا يصح دمج المربعات قطرياً

ملاحظات مهمة

عدد المربعات التي يمكن ضمها يجب أن تكون 1 أو 2 أو 4 (قوى 2) وذلك لمتغيرين حيث :

- يمثل المربع الواحد حداً مؤلفاً من متغيرين.
- يمثل مربعان متجاوران حداً مؤلفاً من حرف واحد.
- يمثل أربعة مربعات متجاورة الدالة التي تساوي 1.

بسط الدوال المنطقية التالية :

$$E(x, y) = \bar{x}y + xy$$

		Y	
		0	1
X	0		1
	1		1

$$E(x, y) = Y$$

$$F(x, y) = \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$$

		Y	
		0	1
X	0	1	1
	1		

$$F(x, y) = \bar{x}$$

X	Y	F	E	Minterm	
0	0	1	0	m_0	$\bar{x}\bar{y}$
0	1	1	1	m_1	$\bar{x}y$
1	0	0	0	m_2	$x\bar{y}$
1	1	0	1	m_3	xy

بسط الدوال المنطقية التالية :

$$F(x, y) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y + x\bar{y} + xy$$

		Y	
		0	1
X	0	1	1
	1	1	1

$$F(x, y) = 1$$

$$F(x, y) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + xy$$

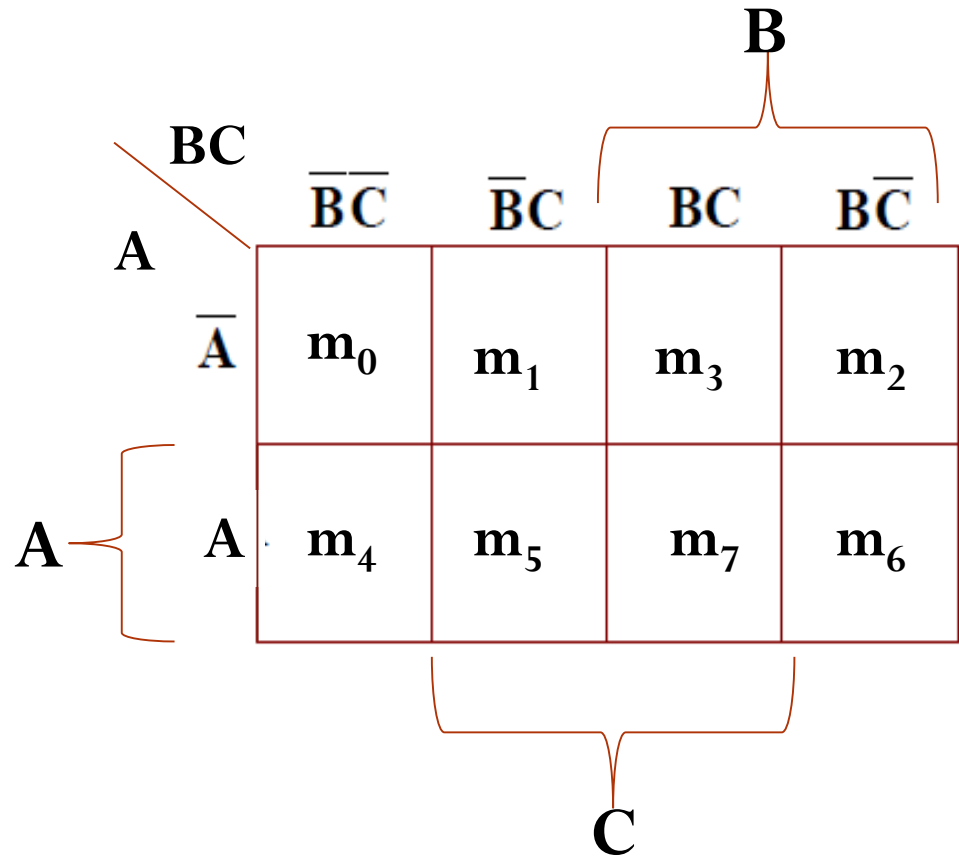
		Y	
		0	1
X	0	1	
	1	1	1

$$F(x, y) = x + \bar{y}$$

2- خريطة كارنوف لثلاث متغيرات

لوكان هناك ثلاث متغيرات هما (A,B,C) فإن خريطة كارنوف تحتوي فقط على ثمانية احتمالات وبالتالي لها ثمانية مربعات كالتالي :

A	B	C	Minterm	
0	0	0	m_0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$
0	0	1	m_1	$\overline{A}\overline{B}C$
0	1	0	m_2	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	m_3	$\overline{A}BC$
1	0	0	m_4	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	m_5	$A\overline{B}C$
1	1	0	m_6	$AB\overline{C}$
1	1	1	m_7	ABC



2- خريطة كارنوف لثلاث متغيرات

نلاحظ بأن حدود حواصل الضرب ليست مرتبة بمتابعة ثنائية :

$$110 - 010 - 001 - 000$$

ولكن تترتب بحيث أنه عند الانتقال من مربع لمربع آخر مجاور يتغير واحد فقط من المتغيرين من 0 إلى 1 أو العكس .

تعتبر الخريطة موضوعة علي سطح أسطوانة حيث تتلامس الحافتان اليمنى واليسرى لتكوين مربعات متجاورة فمثلاً:

		BC			
		\overline{BC}	\overline{BC}	BC	BC
A	\overline{A}	m_0	m_1	m_3	m_2
	A	m_4	m_5	m_7	m_6

m_0 تعتبر مجاورة لـ m_2

m_4 تعتبر مجاورة لـ m_6

ملاحظات مهمة

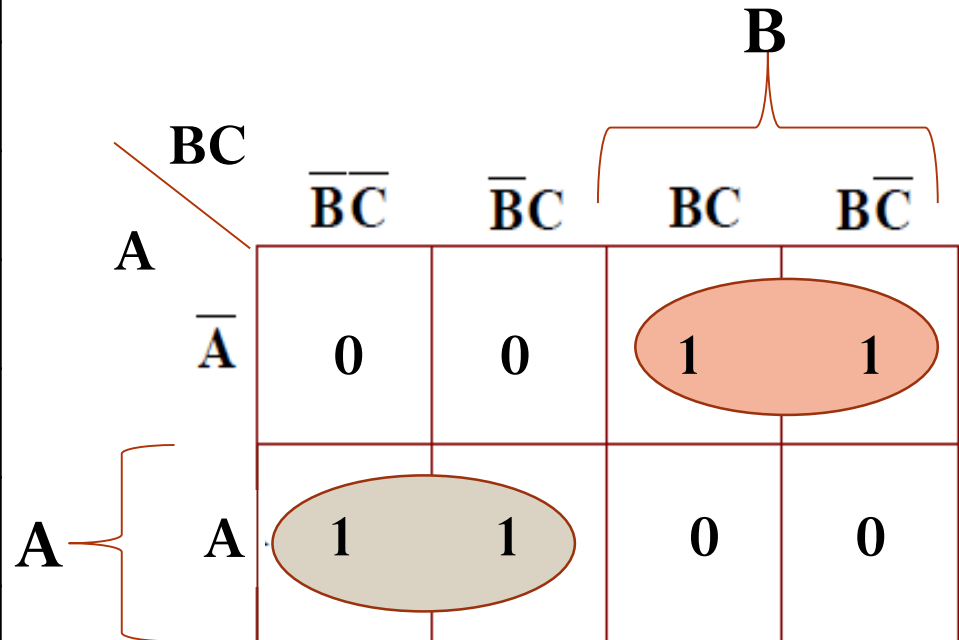
عدد المربعات التي يمكن ضمها يجب أن تكون 1 أو 2 أو 4 أو 8 (قوى 2) وذلك
لثلاثة متغيرات حيث :

- يمثل المربع الواحد حداً مؤلفاً من ثلاثة حروف.
- يمثل مربعان متجاوران حداً مؤلفاً من حرفين.
- يمثل أربعة مربعات متجاورة حداً من حرف واحد.
- تمثل ثمانية مربعات متجاورة الدالة التي تساوي 1.

2- خريطة كارنوف لثلاث متغيرات

من جدول الصدق ارسم خريطة كارنوف لإيجاد المعادلة .

A	B	C	F	Minterm
0	0	0	0	m_0 \overline{ABC}
0	0	1	0	m_1 $\overline{A}BC$
0	1	0	1	m_2 $\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	1	m_3 $\overline{A}BC$
1	0	0	1	m_4 $A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	1	m_5 $A\overline{B}C$
1	1	0	0	m_6 $ABC\overline{C}$
1	1	1	0	m_7 ABC



$$F(A, B, C) = \overline{A}B + A\overline{B}$$

بسط الدوال المنطقية التالية :

$$F(x, y, z) = \sum (0, 1, 2, 4, 5, 6)$$

		Y			
		00	01	11	10
X	0	1	1		1
	1	1	1		1

Diagram illustrating the Karnaugh map for $F(x, y, z) = \sum (0, 1, 2, 4, 5, 6)$. The map shows 1s in cells (0,00), (0,01), (0,10), (1,00), (1,01), and (1,10). A bracket labeled 'Y' groups the columns 11 and 10. A bracket labeled 'z' groups the columns 00 and 01. A bracket labeled 'x' groups the rows 0 and 1.

$$F(x, y, z) = \bar{y} + y\bar{z}$$

$$F(x, y, z) = \sum (3, 4, 6, 7)$$

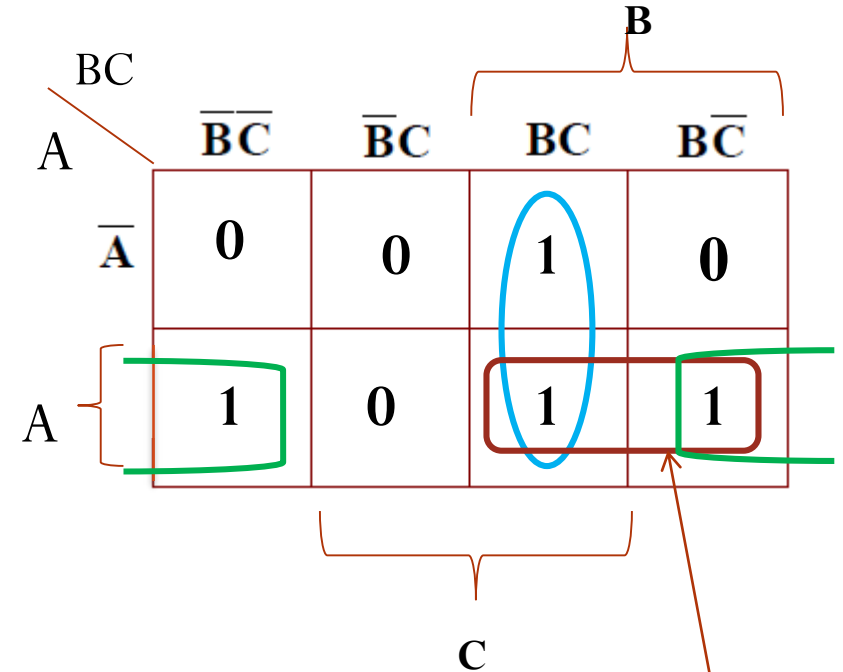
		Y			
		00	01	11	10
X	0			1	
	1	1		1	1

Diagram illustrating the Karnaugh map for $F(x, y, z) = \sum (3, 4, 6, 7)$. The map shows 1s in cells (0,11), (1,00), (1,11), and (1,10). A bracket labeled 'Y' groups the columns 11 and 10. A bracket labeled 'z' groups the columns 00 and 01. A bracket labeled 'x' groups the rows 0 and 1.

$$F(x, y, z) = x\bar{z} + yz$$

بسط الدوال المنطقية التالية :

A	B	C	F	Minterm
0	0	0	0	m_0 \overline{ABC}
0	0	1	0	m_1 \overline{ABC}
0	1	0	0	m_2 \overline{ABC}
0	1	1	1	m_3 \overline{ABC}
1	0	0	1	m_4 \overline{ABC}
1	0	1	0	m_5 \overline{ABC}
1	1	0	1	m_6 ABC
1	1	1	1	m_7 ABC

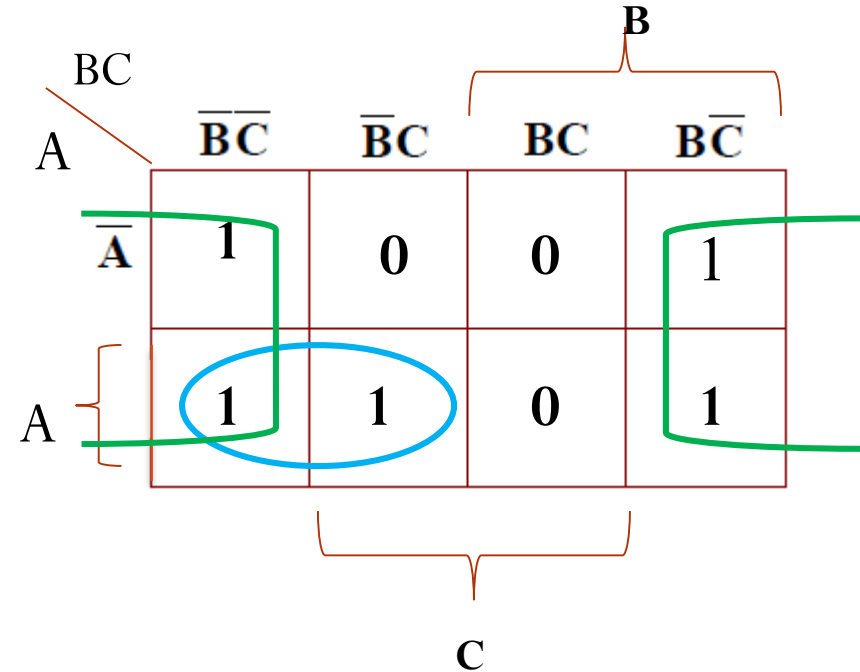


$$F(A, B, C) = \overline{A}C + BC + AB$$

لا يمكن استخدام الدمج أكثر من مرة فلذلك الحد
AB زائد

بسط الدوال المنطقية التالية :

A	B	C	F	Minterm
0	0	0	1	m_0 \overline{ABC}
0	0	1	0	m_1 \overline{ABC}
0	1	0	1	m_2 $\overline{A}BC$
0	1	1	0	m_3 $\overline{A}BC$
1	0	0	1	m_4 $A\overline{BC}$
1	0	1	1	m_5 $A\overline{BC}$
1	1	0	1	m_6 ABC
1	1	1	0	m_7 ABC



$$F(A, B, C) = \overline{C} + A\overline{B}$$

بسط الدالة التالية باستخدام خرائط كارنوف :

$$F(A, B, C) = \bar{A}C + \bar{A}B + A\bar{B}C + BC$$

• نحاول كتابة المعادلة بالطريقة التالية لتعبئة المربعات

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + A\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC + \bar{A}BC$$

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C + ABC + \bar{A}BC$$

$$F(A, B, C) = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C + ABC$$

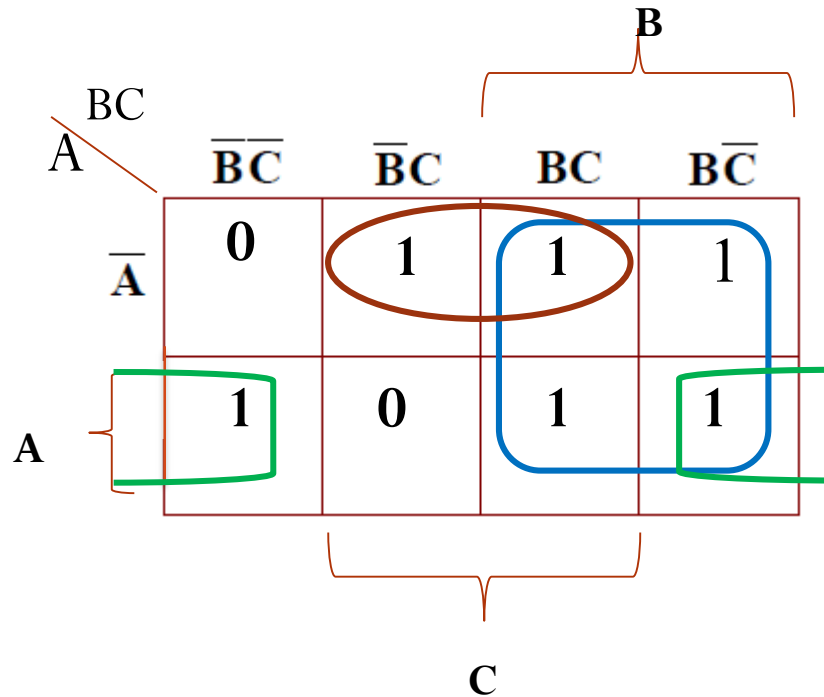
$$F(A, B, C) = \Sigma(1, 2, 3, 5, 7)$$

$$F(A, B, C) = C + \bar{A}B$$

		BC		B	
		00	01	11	10
A	0		1	1	1
	1		1	1	
				C	

بسط المعادلة المنطقية التالية :

$$F(A,B,C) = M_0 \cdot M_5$$



$$F = B + \overline{A}C + A\overline{C}$$

$$F = B + A \oplus C$$

بسط المعادلة المنطقية التالية :

$$F(A,B,C) = \sum m(0,1,2,3,4,6)$$

	B			
BC	$\overline{B}\overline{C}$	$\overline{B}C$	BC	$B\overline{C}$
\overline{A}	1	1	1	1
A	1	0	0	1
	\overline{C}		C	

$$F = \overline{C} + \overline{A}$$

خرائط كارنوف لأربعة متغيرات

- لأربعة متغيرات يوجد ستة عشر مربع مخصصة لحواصل الضرب.

	CD	\overline{CD}	\overline{CD}	CD	\overline{CD}
AB	\overline{AB}	m_0 \overline{ABCD}	m_1 \overline{ABCD}	m_3 \overline{ABCD}	m_2 \overline{ABCD}
	\overline{AB}	m_4 \overline{ABCD}	m_5 \overline{ABCD}	m_7 \overline{ABCD}	m_6 \overline{ABCD}
	AB	m_{12} \overline{ABCD}	m_{13} \overline{ABCD}	m_{15} \overline{ABCD}	m_{14} \overline{ABCD}
	\overline{AB}	m_8 \overline{ABCD}	m_9 \overline{ABCD}	m_{11} \overline{ABCD}	m_{10} \overline{ABCD}

- الصفوف والأعمدة مرقمة بمتتالية بحيث يتغير متغير واحد فقط قيمته بين صفين أو عمودين متجاورين.

- يتم تعريف المربعات المتجاورة بأنها المربعات الموجودة جنبا إلى جنب كما ان الخريطة تعتبر موضوعة على سطح تتلامس فيه الحافتان العليا والسفلى وأيضا اليمنى واليسرى لتكوين مربعات متجاورة .

خرائط كارنوف لأربعة متغيرات

A	B	C	D	Minterms
0	0	0	0	m_0 \overline{ABCD}
0	0	0	1	m_1 $\overline{ABC}D$
0	0	1	0	m_2 $\overline{AB}C\overline{D}$
0	0	1	1	m_3 $\overline{AB}CD$
0	1	0	0	m_4 $\overline{A}BC\overline{D}$
0	1	0	1	m_5 $\overline{A}BCD$
0	1	1	0	m_6 $\overline{A}B\overline{C}D$
0	1	1	1	m_7 $\overline{A}BCD$
1	0	0	0	m_8 $A\overline{BCD}$
1	0	0	1	m_9 $A\overline{BC}D$
1	0	1	0	m_{10} $A\overline{B}C\overline{D}$
1	0	1	1	m_{11} $A\overline{B}CD$
1	1	0	0	m_{12} $AB\overline{CD}$
1	1	0	1	m_{13} $AB\overline{C}D$
1	1	1	0	m_{14} $ABC\overline{D}$
1	1	1	1	m_{15} $ABCD$

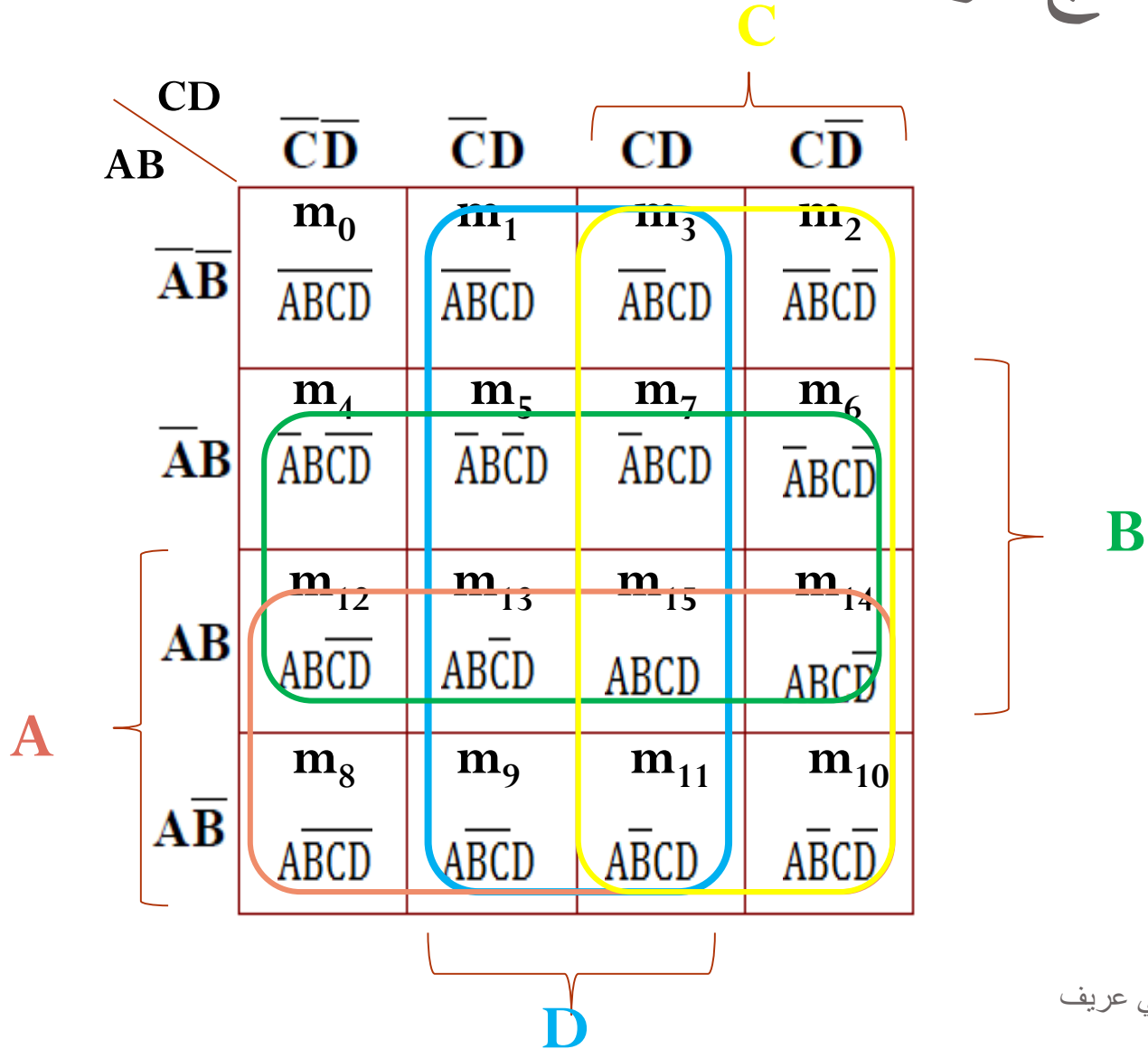
		CD			
		$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
AB	$\overline{A}\overline{B}$	m_0 \overline{ABCD}	m_1 $\overline{ABC}D$	m_3 $\overline{AB}CD$	m_2 $\overline{AB}C\overline{D}$
	$\overline{A}B$	m_4 $\overline{A}BC\overline{D}$	m_5 $\overline{A}BCD$	m_7 $\overline{A}B\overline{C}D$	m_6 $\overline{A}BCD$
AB	$A\overline{B}$	m_{12} $A\overline{B}C\overline{D}$	m_{13} $A\overline{B}\overline{C}D$	m_{15} $ABCD$	m_{14} $ABC\overline{D}$
	AB	m_8 $A\overline{BCD}$	m_9 $A\overline{BC}D$	m_{11} $A\overline{B}CD$	m_{10} $ABC\overline{D}$

ملاحظات مهمة

عدد المربعات التي يمكن ضمها يجب أن تكون 1 أو 2 أو 4 أو 8 أو 16 (قوى 2) وذلك لأربعة متغيرات حيث :

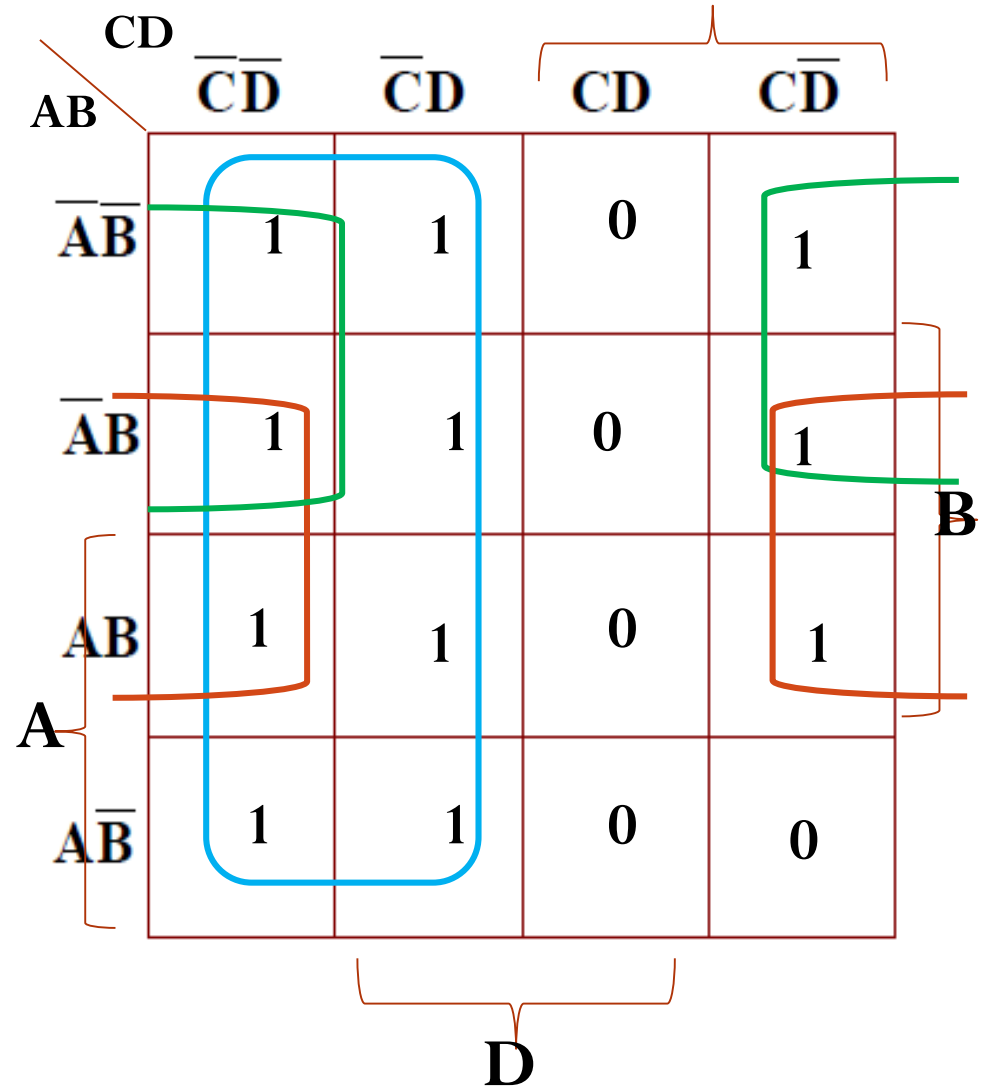
- يمثل المربع الواحد حد حاصل ضرب مؤلف من أربعة حروف.
- يمثل مربعان متجاوران حداً مؤلفاً من ثلاثة حروف.
- يمثل أربعة مربعات متجاورة حداً من حرفين.
- تمثل ثمانية مربعات متجاورة حداً من حرف واحد.
- تمثل ستة عشر مربعاً متجاورة الدالة التي تساوي 1.

طرق دمج المربعات :



من جدول الصدق ارسم خريطة كارنوف

A	B	C	D	Minterms	
0	0	0	0	1	\overline{ABCD}
0	0	0	1	1	$\overline{ABC}D$
0	0	1	0	1	$\overline{AB}C\overline{D}$
0	0	1	1	0	$\overline{AB}CD$
0	1	0	0	1	$\overline{A}BC\overline{D}$
0	1	0	1	1	$\overline{A}BCD$
0	1	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}D$
0	1	1	1	0	$\overline{A}BCD$
1	0	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}\overline{D}$
1	0	0	1	1	$A\overline{B}\overline{C}D$
1	0	1	0	0	$A\overline{B}C\overline{D}$
1	0	1	1	0	$A\overline{B}CD$
1	1	0	0	1	$AB\overline{C}\overline{D}$
1	1	0	1	1	$AB\overline{C}D$
1	1	1	0	1	$ABC\overline{D}$
1	1	1	1	0	$ABCD$



$$F(A, B, C, D) = \overline{D} + \overline{AD} + B\overline{D}$$

بسط الدالة المنطقية التالية :

$$F(A,B,C,D) = \sum(3,7,11,13,14,15)$$

$$F(A, B, C, D) = CD + ABC + ABD$$

AB		C			
		\overline{CD}	\overline{CD}	CD	$C\overline{D}$
A	$\overline{A}\overline{B}$	0	0	1	0
	$\overline{A}B$	0	0	1	0
	$A\overline{B}$	0	1	1	1
	AB	0	0	1	0

Diagram illustrating the Karnaugh map for the function $F(A,B,C,D) = \sum(3,7,11,13,14,15)$. The map is a 4x4 grid with variables A and B on the vertical axis, and C and D on the horizontal axis. The cells are labeled with their corresponding minterms: $\overline{A}\overline{B}$, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, and AB for the rows; and \overline{CD} , \overline{CD} , CD , and $C\overline{D}$ for the columns. The function is represented by 1s in the cells corresponding to minterms 3, 7, 11, 13, 14, and 15. The prime implicants are highlighted: a green vertical rectangle covers the cells (3,7,11,13) representing the prime implicant CD ; a blue horizontal rectangle covers the cells (11,14) representing the prime implicant ABC ; and a red horizontal rectangle covers the cells (11,13,14,15) representing the prime implicant ABD .

بسط الدالة المنطقية التالية :

$$f(A,B,C,D) = \prod M(0,1,4,5,11,15)$$

$$F(A,B,C,D) = (A + C)(\bar{A} + \bar{C} + \bar{D})$$

		C			
		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
A	$\bar{A}\bar{B}$	0	0	1	1
	$\bar{A}B$	0	0	1	1
A	$A\bar{B}$	1	1	0	1
	AB	1	1	0	1

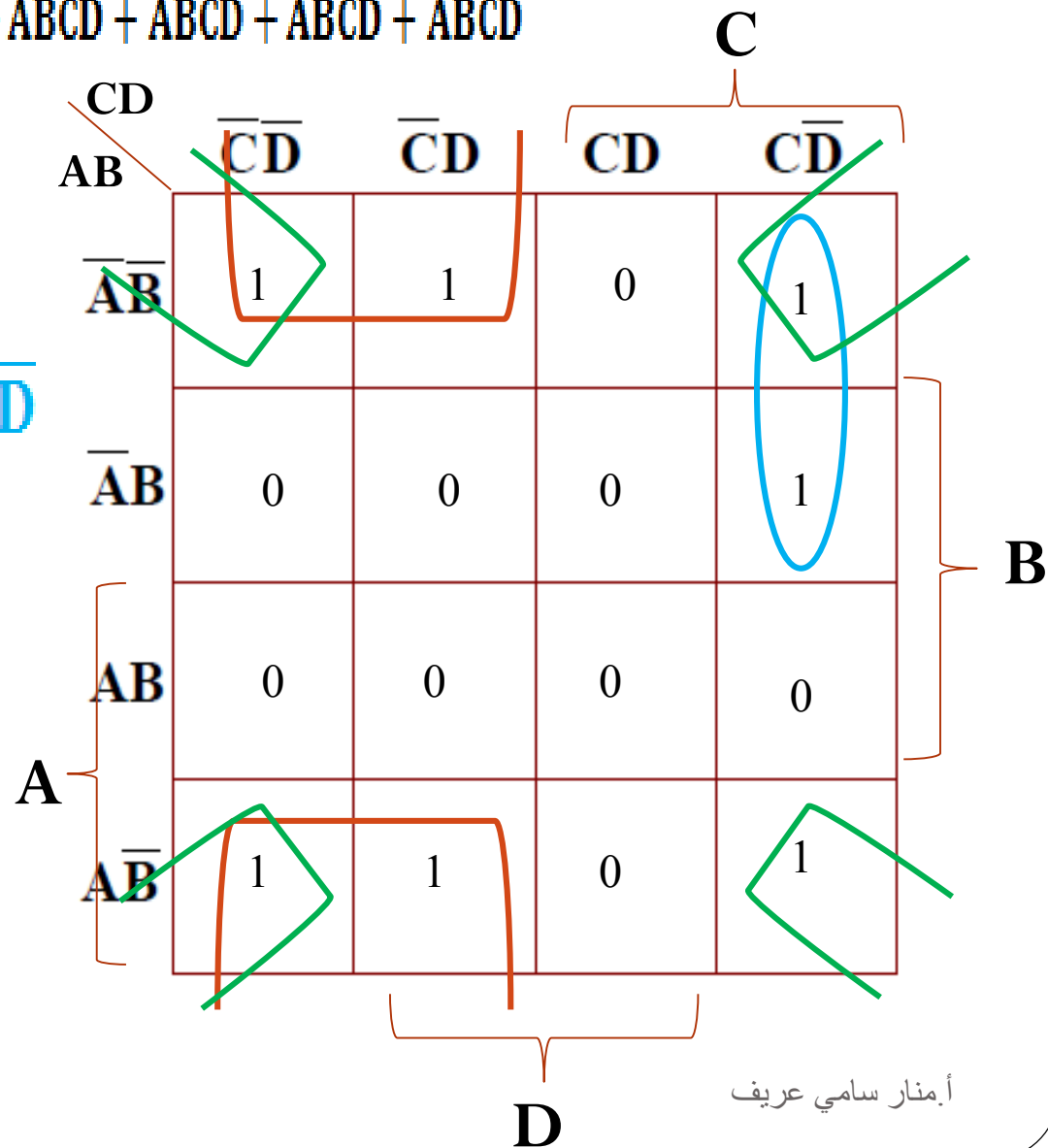
The table is annotated with a green box around the top-left 2x2 cells (0,0), (0,0), (1,0), (1,0) and a blue box around the bottom-right 2x2 cells (1,0), (1,0), (1,1), (1,1). Brackets on the right and bottom indicate the B and D dimensions respectively.

اختصر الدالة المنطقية التالية :

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + A\overline{B}\overline{C}$$

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}\overline{D}$$

$$F(A, B, C, D) = \overline{B}\overline{D} + \overline{B}\overline{C} + \overline{A}\overline{C}\overline{D}$$



Don't Care Conditions

الحالات المجهولة

في بعض الحالات تكون قيمة الدالة مجهولة أو مستحيلة الحدوث، أو أن مخرجاتها غير مستخدمة ففي مثل هذه الحالات يعرف خرج الدالة بأنه غير مهم ويرمز إليها بالرمز x حيث أنها تساعدنا في الحل ولكن لا يتوجب علينا تغطية المربعات التي تحتوي على x بالكامل، ولكن إذا احتجنا لاستخدامها نستخدمها عكس المربعات التي تحتوي على قيمة 1 فإنه يتوجب علينا تغطيتها بالكامل وإلا فإن حلك خاطئ.

في نظام التشفير BCD العشرة أرقام الأولى فقط مستخدمة بينما الستة الأخرى لا يمكن حدوثها وبهذا سوف نعتبرها حالات مهمة Don't Care

$$F(w,x,y,z) = \Sigma(1,3,7,11,15)$$

$$d(w,x,y,z) = \Sigma(0,2,5,8)$$

بسط الدالة المنطقية التالية :

ومعطى لديك الـ Don't Care

أولاً : نقوم بتعبئة المربعات ب 1 ثم تعبئتها بـ X
ثانياً : نقوم بدمج المربعات التي سوف تعطينا قيمة الدالة .

$$F(A, B, C, D) = \overline{A}\overline{B} + CD$$

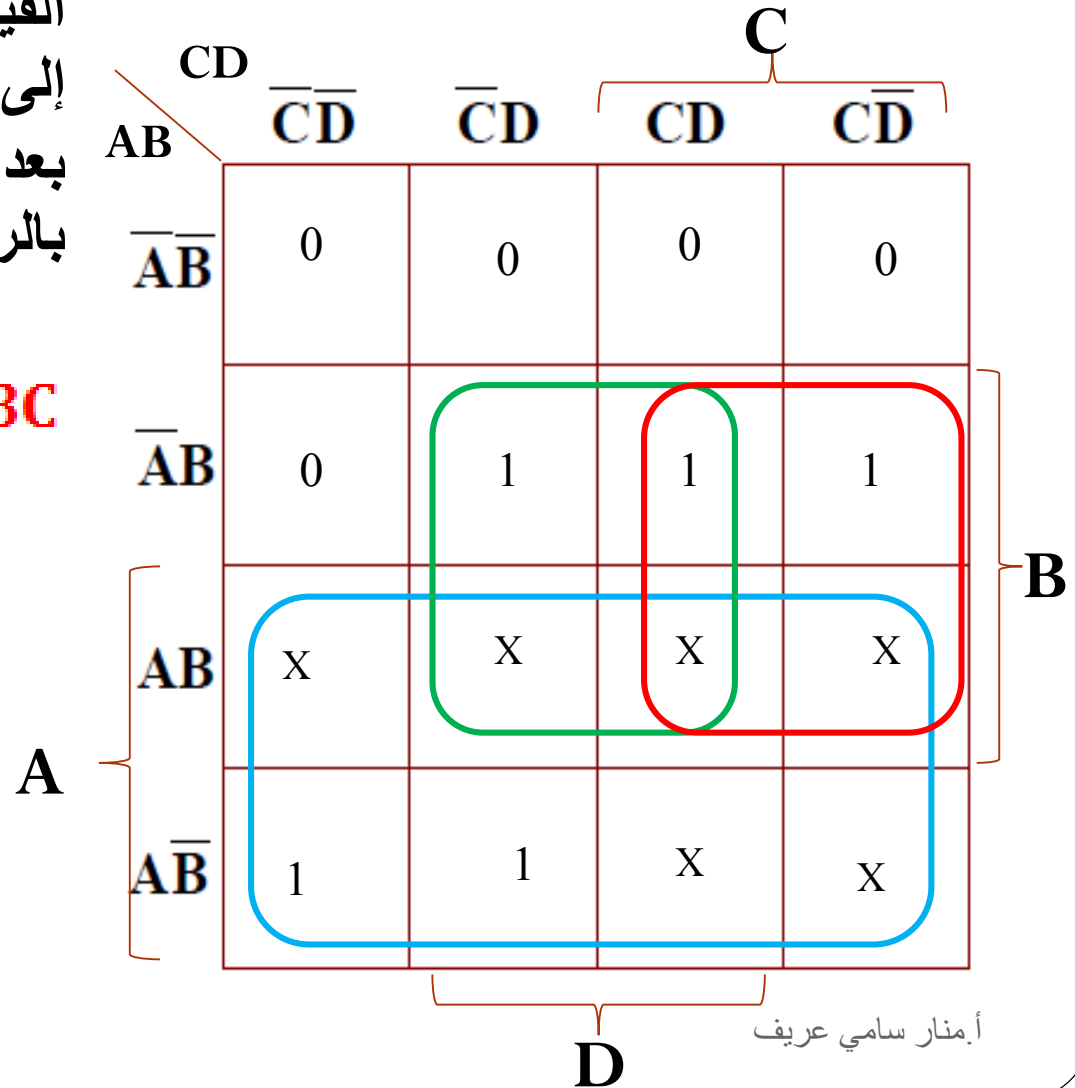
		C			
		$\overline{C}\overline{D}$	$\overline{C}D$	CD	$C\overline{D}$
A	$\overline{A}\overline{B}$	X	1	1	X
	$\overline{A}B$	0	X	1	0
	AB	0	0	1	0
	$A\overline{B}$	X	0	1	0
				D	

أ.منار سامي عريف

بسط الدالة المنطقية $F(A,B,C,D)$ التي تعطي الخرج يساوي 1 عندما تكون شفرة الـ BCD أكبر من أو تساوي 5.

القيم التي أكبر أو تساوي 5 هي من 5 إلى 9 في نظام BCD وباقي الحالات بعد ذلك هي مستحيلة ونرمز لها بالرمز X

$$F(A, B, C, D) = A + BD + BC$$



من جدول الصدق قم بكتابة التعبير المنطقي لمتغير الخرج Y في صورة :

1- مجموع الحدود الصغرى

2- مضروب الحدود الكبرى

ثم قم بتبسيط المعادلات باستخدام خرائط كارنوف

No	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

صورة مجموع الحدود الصغرى :

$$Y(A,B,C,D) = \sum m(1,2,5,6,9) + \sum d(10,11,12,13,14,15)$$

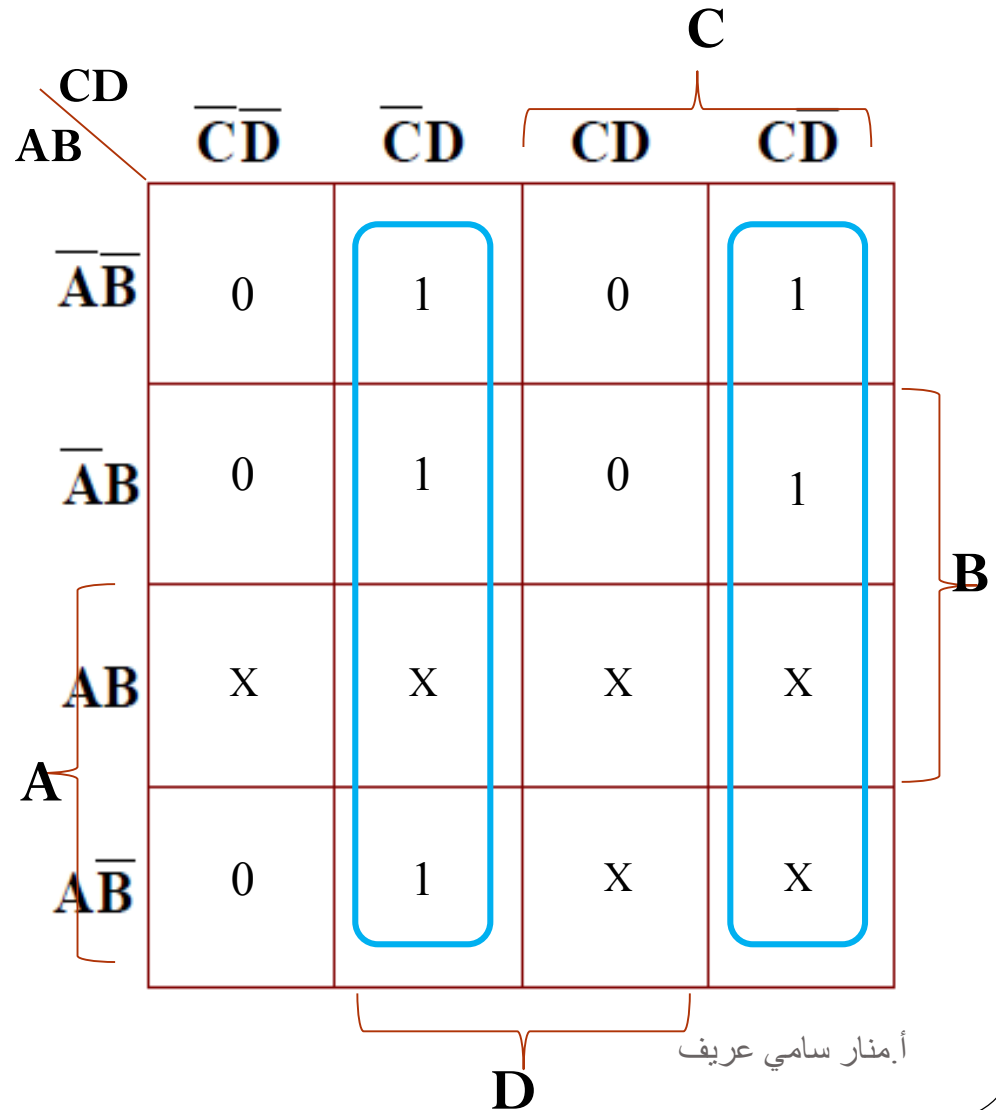
صورة مضروب الحدود الكبرى :

$$Y(A,B,C,D) = \prod M(0,3,4,7,8) + \prod d(10,11,12,13,14,15)$$

بتبسيط المعادلات باستخدام خرائط كارنوف :
 1- مجموع الحدود الصغرى

$$Y(A, B, C, D) = \bar{C}D + C\bar{D}$$

No	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X



أ.منار سامي عريف

بتبسيط المعادلات باستخدام خرائط كارنوف :
 2- مضروب الحدود الكبرى

$$Y(A, B, C, D) = (C + D) \cdot (\bar{C} + \bar{D})$$

No	A	B	C	D	Y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	X
11	1	0	1	1	X
12	1	1	0	0	X
13	1	1	0	1	X
14	1	1	1	0	X
15	1	1	1	1	X

