تصميم الدوائر المنطقية

ITGS 126

المحـاضرة الأولى

نظريات الجبر البولي والصيغ القياسية والصيغ القانونية للدوال

أ. منار سامي عريف

محتويات المقرر ITGS 126

الجزء الأول: الجبر البولي

- الصيغ القياسية والصيغ القانونية للدوال.
- التبسيط باستخدام خرائط كارنوف.
- تنفيذ الدوال بمستويين من البوابات

الجزء الثاني: المنطق التركيبي

- خطوات تصميم الدوائر المنطقية
- نصف الجامع/الطارح والكامل
- المشفرات ومفككات الشفرات
- تنفيذ الدوال باستخدام مفكك الشفرة
- المجمعات والمفرقات
- تنفيذ الدوال باستخدام المجمعات

محتويات المقرر ITGS 126

- **الجزء الثالث :** المنطق التتابعي
  - الماسكات والقلابات (SR, D, T, AND JK)
  - جداول تحريض القلابات.
  - تصميم الدوائر التتابعية.
  - مخططات الحالة واستخدامها للتصميم
- **الجزء الرابع :** الأنظمة الرقمية
  - مسجلات الازاحة بالاتجاهين مع مدخلات متسلسلة ومتوازية.
  - العدادات المتزامنة وغير المتزامنة ،التصاعدية والتنازلية.
  - العدادات العشوائية والمحكومة وعداد جونسون.
  - وحدات الذاكرة: RAMS & ROMS, PLAS /

المتغير المنطقي (Logical Variable) :

- المتغير المنطقي : هو أي متغير يمكن أن يأخذ قيمة واحدة فقط من قيمتين مثلاَ :

صواب أو خطأ

True أو False

ON أو OFF

High أو Low

+5 volts أو 0 volts

يرمز لإحدى القيمتين بالرمز 1 والقيمة الأخرى بالرمز 0 وأي متغير منطقي لا يمكن أن يأخذ إلا إحدى هاتين القيمتين.

العمليات المنطقية (Logical Operations)

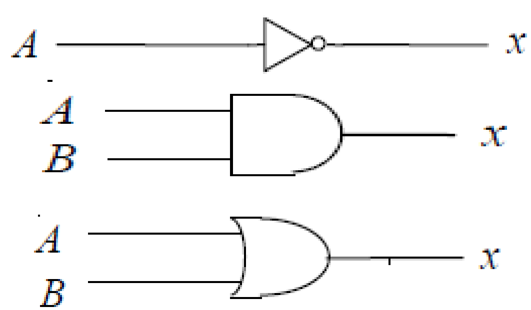
- العمليات المنطقية هي العمليات التي يمكن إجراؤها على المتغيرات المنطقية وبعض هذه العمليات هي عمليات أساسية وهي عمليات AND , OR , NOT وبعضها عمليات غير أساسية مثل عمليات NAND , NOR, XOR وهذه العمليات يمكن التعبير عنها باستخدام العمليات الأساسية .

التعبير المنطقي (Logical Expression) :

- التعبير المنطقي : هو عبارة عن مجموعة من المتغيرات المنطقية المرتبطة مع بعضها البعض بعمليات منطقية مثل : $x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$
- يتكون التعبير المنطقي هنا من أربعة متغيرات هي A,B,C تربط بينها عمليات AND ,NOT, OR وعملية التكافؤ = .

أولوية تنفيذ المعاملات :

1. الأقواس
2. النفي NOT
3. و AND
4. أو OR

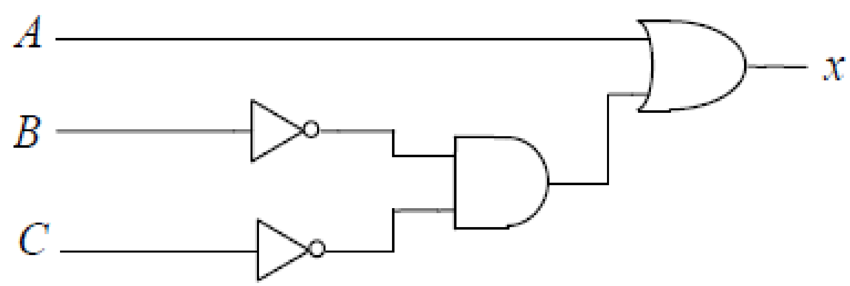


أ.منار سامي عريف

الدائرة المنطقية (Logical Circuit)

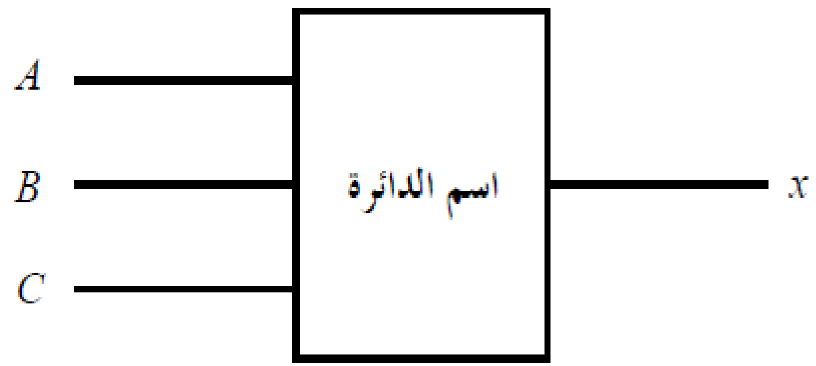
- يمكن تمثيل أي تعبير منطقي بدائرة منطقية حيث ننظر للعمليات المنطقية الموجودة بالتعبير ونقوم بربط البوابات المنطقية التي تقوم بإجراء تلك العمليات بالأسلوب المناسب مثلا التعبير المنطقي $x = A + \overline{B} \cdot \overline{C}$

يمكن تميله بالدائرة المنطقية :



المخطط المنطقي (logic Diagram)

- هو عبارة عن مخطط مبسط يوضح متغيرات الدخل للدائرة المنطقية ومسمياتها ومتغيرات الخرج ومسمياتها بالإضافة إلى اسم الدائرة الدال على وظيفتها
فمثلا الدائرة المنطقية السابقة يمكن التعبير عنها بمخطط منطقي كالتالي :



- ونقوم باستخدام المخططات المنطقية كبديل للدائرة المنطقية المفصلة كنوع من التبسيط وذلك عندما لا نكون بحاجة للتفاصيل الداخلية للدائرة المنطقية.

نظريات الجبر البولي (Boolean Algebra Theorems)

- الجبر البولي هو جبر المتغيرات المنطقية والهدف الأساسي من دراستنا لنظريات الجبر البولي هو استخدام تلك النظريات في تبسيط التعبيرات المنطقية.
- لكل نظرية من نظريات الجبر البولي نظرية مقابلة أو مناظرة لها وللحصول على النظرية المقابلة لأي نظرية نقوم بإجراء التبديلات التالية في النظرية الأصلية :
- استبدال أي 0 بـــ 1
- استبدال أي 1 بـــ 0
- استبدال أي عملية AND بـــ بعملية OR
- استبدال أي عملية OR بـــ عملية AND

نظريات الجبر البولي (Boolean Algebra Theorems)

- يمكن اثبات صحة أي نظرية باستخدام جداول الصواب والجدول التالي يوضح النظريات الأساسية المستخدمة في الجبر البولياني:

اسم النظرية	النظرية	النظرية المقابلة
عكس العكس	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
العنصر المحايد	$A + 1 = 1$ $A + 0 = A$	$A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = A$
المتغير مع نفسه	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
المتغير مع عكسه	$A + \overline{A} = 1$	$A \cdot \overline{A} = 0$
النظرية الإبدالية	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
النظرية التجميعية	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
النظرية التوزيعية	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$

نظريات مهمة في الجبر البولي (Boolean Algebra Theorems)

الامتصاص أو الابتلاع	$A+A\cdot B=A$ $A+\bar{A}\cdot B=A+B$	$A\cdot(A+B)=A$ $A\cdot(\bar{A}+B)=A\cdot B$
دي مورغان (De Morgan)	$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$	$\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$

اثبات صحة بعض قوانين الجبر البولياني باستخدام جداول الصدق :

المتغير مع نفسه $X+X=X$ $X.X=X$

X	X.X	X+X
0	0	0
1	1	1

العنصر المحايد $X+1=1$ $X.0=0$

X	X.0	X+1
0	0	1
1	0	1

H.W .. طبق قوانين التبديل والتجميع والتنسيق باستخدام جداول الصدق ؟

قانون الامتصاص ABSORPTION (DUAL)

$X+XY=X$

$=X+XY$ بأخذ X عامل مشترك

$=X(1+Y)$ قانون العنصر المحايد

$= X$

$X(X+Y)=X$

$= X(X+Y)$ قانون التوزيع

$=X.X+X.Y$ المتغير مع نفسه

$=X+X.Y$

$=X(1+Y)$

$=X$

=

ABS0RPTION (DUAL) قانون الامتصاص

$X + \bar{X}Y = X + Y$

$= X + \bar{X}.Y$ قانون التوزيع

$= (X + \bar{X}).(X + Y)$ المتغير مع عكسه

$= (X + Y)$

$\bar{X} + X.Y = \bar{X} + Y$

$\bar{X} + X.Y$ قانون التوزيع

$(\bar{X} + X).(\bar{X} + Y)$ المتغير مع عكسه

$(\bar{X} + Y)$

أمثلة :

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي :-

1- $F = XY + X\overline{Y} = X(Y + \overline{Y}) = X.1 = X$

2- $F = X(\overline{X} + Y) = X\overline{X} + XY = 0 + XY = XY$

3- $F = (X + Y)(X + \overline{Y}) = X + Y\overline{Y} = X + 0 = X$

4- $F = [XY(Z + \overline{Y}W) + \overline{X}Y]Z = [XYZ + XY\overline{Y}W + \overline{X}Y]Z$

$F = [XYZ + 0 + \overline{X}Y]Z = XYZZ + \overline{X}YZ$

$F = XYZ + \overline{X}YZ = YZ(X + \overline{X}) = YZ.1 = YZ$

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي :-

5- $F = \overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ$

$F = \overline{X}Y(Z + \overline{Z}) + XZ$

$F = \overline{X}Y + XZ$

6- $F = ABC + A\overline{B}C + ABC + A$

$F = A(BC + \overline{B}C + BC + 1)$

$F = A$

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي :-

7- $F = AB + A(A + C) + B(A + C)$

$$F = AB + AA + AC + AB + BC$$

$$F = AB + A + AC + BC$$

$$F = A(B + 1 + C) + BC$$

$$F = A.1 + BC$$

$$F = A + BC$$

8- $F = \overline{A}.\overline{B} + \overline{A}.B + A.\overline{B}$

$$F = \overline{B}(\overline{A} + A) + \overline{A}.B$$

$$F = \overline{B}.1 + \overline{A}.B \qquad F = \overline{B} + \overline{A}.B$$

$$F = \overline{B} + \overline{A}$$

قانون الامتصاص

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي :-

9- $$F = \overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C + \overline{A}.B.C + A.B.C$$

بإخراج العامل المشترك في كل حدين متشابهين

$$F = \overline{A}.\overline{B}(\overline{C} + C) + B.C(\overline{A} + A)$$

$$F = \overline{A}.\overline{B}.1 + B.C.1$$

$$F = \overline{A}.\overline{B} + B.C$$

10- $$F = \overline{A}(A + B) + \overline{C} + CB$$

$$F = \overline{A}B + \overline{C} + CB$$

$$F = \overline{A}B + \overline{C} + B$$

$$F = \overline{A}B + B + \overline{C}$$

$$F = B + \overline{C}$$

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي :-

11- $$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

نبحث عن التشابه بين الحدود

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

بتكرار الحد الأول

$$y = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$$

بجمع كل حدين متشابهين

$$y = \bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{C} + A\bar{B}$$

بالنظرية الإبدالية

$$y = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B} + \bar{A}\bar{C}$$

بجمع الحدين المتشابهين

$$y = \bar{B} + \bar{A}\bar{C}$$

أ.منار سامي عريف

بسط المعادلات المنطقية التالية باستخدام قوانين الجبر البولي :-

12- $F = \overline{\overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B}$ دي مورغان

$F = \left(\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} + \overline{C}\right).(\overline{\overline{A}} + \overline{B})$ عكس العكس

$F = \left(A + B + \overline{C}\right).(A + \overline{B})$ التوزيعية

$F = A + (B + \overline{C}).\overline{B}$

$F = A + \overline{CB}$

13- $y = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$

$y = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$

$y = \overline{\overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}}$

يجمع كل حدين متشابهين $y = \overline{B\overline{C} + A\overline{B}}$

بنظرية دي مورغان $y = \overline{(B\overline{C})} \cdot \overline{(A\overline{B})}$

بنظرية دي مورغان $y = (\overline{B} + C) \cdot (\overline{A} + B)$

متمم الدالة باستخدام قوانين دي مورغان :-

14-
$$F = \overline{(\overline{A} + YZ).\overline{P} + W}.$$
$$F = \overline{(\overline{A} + YZ).\overline{P}}.\overline{W}.$$
$$F = \overline{(\overline{A} + YZ)} + P.\overline{W}.$$
$$\mathrm{F} = \overline{\overline{A}} \cdot (\overline{Y} + \overline{Z}) + P \cdot \overline{W}$$
$$F = A \cdot (\overline{Y} + \overline{Z}) + P \cdot \overline{W}$$

15-
$$F = \{A[B + C(D + \overline{E})]\}$$
$$\overline{F} = \overline{\{A[B + C(D + \overline{E})]\}}$$
$$\overline{F} = \overline{A} + \overline{B}.(\overline{C} + \overline{D}).E.$$

الصيغ القياسية والصيغ القانونية للمعادلات المنطقية:-

يمكن التعبير جبريا (في صورة قياسية) عن أي دالة بولينية من جدول الصدق المعطى .

حدود حواصل الضرب القياسية (Minterms) :

هو حد حاصل الضرب الذي تظهر فيه كل متغيرات الدالة بحيث يكون كل متغير إما في صورته الإعتيادية (مثلاً x) أو في صورته المكملة (مثلاً $\bar{x}$).

يمكن كتابة 2^n من حدود حواصل الضرب القياسية لــ n من المتغيرات في جدول كالآتي :

1- كتابة الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^n-1 تحت المتغيرات البالغة n .

2- كل حد حاصل ضرب قياسي عبارة عن حد AND مؤلف من المتغيرات البالغ عددها n مع جعل كل متغير منها مكملاً إذا كان الرقم الثنائي المناظر 0 وغير مكمل إذا كان 1. (وذلك لينتج عن كل حد القيمة 1).

يرمز لكل حد حاصل ضرب قياسي بالرمز m_i حيث i يشير إلى العدد العشري الذي يكافئ العدد الثنائي.

حدود حواصل الضرب القياسية (Minterms) :

- الجدول التالي يبين حدود حواصل الضرب القياسية Minterms لمتغيرين X,Y.

X	Y	MINTERMS	الرمز
0	0	$\overline{X\,Y}.$	m_0
0	1	$\overline{X}.Y$	m_1
1	0	$X.\overline{Y}$	m_2
1	1	$X.Y$	m_3

ملاحظة / قيمة الدالة تساوي مجموع الحدود ذات القيمة 1 .

الصيغ القياسية والصيغ القانونية للمعادلات المنطقية:-

حدود حواصل الجمع القياسية (Maxterms) :

هو حد حاصل الجمع الذي تظهر فيه كل متغيرات الدالة بحيث يكون كل متغير إما في صورته الإعتيادية (مثلاً x) أو في صورته المكملة (مثلاً $\overline{x}$).

يمكن كتابة 2^n من حدود حواصل الجمع القياسية لــ n من المتغيرات في جدول كالآتي :

1- كتابة الأعداد الثنائية من 0 إلى 2^n-1 تحت المتغيرات البالغة n.

2- كل حد حاصل جمع قياسي عبارة عن حد OR مؤلف من المتغيرات البالغ عددها n مع جعل كل متغير منها مكملاً إذا كان الرقم الثنائي المناظر 1 وغير مكمل إذا كان 0. (وذلك لينتج عن كل حد القيمة 0).

يرمز لكل حد حاصل جمع قياسي بالرمز M_J حيث يشير إلى العدد العشري الذي يكافئ العدد الثنائي.

حدود حواصل الجمع القياسية (Maxterms) :

- الجدول التالي يبين حدود حواصل لجمع القياسية Maxterms لمتغيرين X,Y.

X	Y	MAXTERMS	الرمز
0	0	$X+Y$	M_0
0	1	$X+\overline{Y}$	M_1
1	0	$\overline{X}+Y$	M_2
1	1	$\overline{X}+\overline{Y}$	M_3

ملاحظة / قيمة الدالة تســـاوي حاصل ضرب الحـــدود ذات القيمة 0 .

لاحظ أن :

$$M_j = \overline{m_i}$$

For Example : j=3

$$m_i = \bar{x}yz$$

$$\overline{m_i} = \overline{\bar{x}yz}$$

$$\overline{m_i} = x + \bar{y} + \bar{z} \;\; = M_3$$

HW / اكتب جدول لحواصل الضرب القياسية وحواصل الجمع القياسية لأربع متغيرات W,X,Y,Z

التحويل بين الصيغ القانونية :

- مجموع الحـــــدود الصغرى SOM :

A	B	C	F	$\overline{F}$	
0	0	0	0	1	M_0
0	0	1	1	0	m_1
0	1	0	0	1	M_2
0	1	1	0	1	M_3
1	0	0	1	0	m_4
1	0	1	0	1	M_5
1	1	0	0	1	M_6
1	1	1	1	0	m_7

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{BC} + ABC$$

$$F = m_1 + m_4 + m_7$$

$$F = \sum m(1,4,7)$$

- حاصل ضرب الحدود الكبرى POM :

$$F = (A+B+C).(A+\overline{B}+C).(A+\overline{B}+\overline{C}).(\overline{A}+B+\overline{C}).(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

$$F = M_0.M_2.M_3.M_5.M_6$$

$$F = \prod M(0,2,3,5,6)$$

أ.منار سامي عريف

الصور القياسية للمعادلات المنطقية :

- كما ذكرنا بأنه يمكن التعبير جبرياً (في صورة قياسية)عن أي دالة بولينية من جدول صدق معطى وذلك في إحدى الصورتين القياسيتين التاليتين :-

1- جمع حدود حواصل الضرب (جمع المضاريب) Sum Of Product’s SOP

- تشبهه الصيغة القانونية مجموع الحدود الصغرى

- وهو جمع (OR) لحدود حواصل الضرب والتي تكون عندها الدالة بـــ 1 ويرمز لها بالرمز $\sum$

2- ضرب حدود حواصل الجمع (ضرب المجاميع) Product Of Sum’s POS

- تشبهه الصيغة القانونية مجموع الحدود الكبرى.

- وهو ضرب (AND) لحدود حواصل الجمع والتي تكون عندها الدالة بـــ 0 ويرمز لها بالرمز $\prod$

أمثلة :

- استنتج المعادلة المنطقية من جدول الصدق التالي في صورة :

أولا : SOP   ثانياً : POS

أولا : لإيجاد SOP نجمع الحدود m التي عندها F=1

A	B	C	F	
0	0	0	0	
0	0	1	1	m_1
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	1	m_4
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	m_7

$$F = m_1 + m_4 + m_7$$

$$F = \sum m(1,4,7)$$

$$F = \overline{A}\,\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + ABC$$

أمثلة :

- استنتج المعادلة المنطقية من جدول الصدق التالي في صورة :

أولا : SOP   ثانياً : POS

A	B	C	F	
0	0	0	0	M_0
0	0	1	1	
0	1	0	0	M_2
0	1	1	0	M_3
1	0	0	1	
1	0	1	0	M_5
1	1	0	0	M_6
1	1	1	1	

ثانياً : لإيجاد POS نضرب الحدود M التي عندها F=0

$$F = M_0 . M_2 . M_3 . M_5 . M_6$$

$$F = \prod M(0,2,3,5,6)$$

$$F = (A+B+C).(A+\bar{B}+C).(A+\bar{B}+\bar{C}).(\bar{A}+B+\bar{C}).(\bar{A}+\bar{B}+C)$$

أمثلة :

- استنتج المعادلة المنطقية من جدول الصدق التالي في صورة :

أولا : SOP ثانياً : POS

أولا : لإيجاد SOP نجمع الحدود m التي عندها F=1

A	B	C	F	
0	0	0	1	m_0
0	0	1	0	
0	1	0	1	m_2
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	m_5
1	1	0	0	
1	1	1	1	m_7

$$F = m_0 + m_2 + m_5 + m_7$$

$$F = \sum m(0,2,5,7)$$

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ$$

أمثلة :

- استنتج المعادلة المنطقية من جدول الصدق التالي في صورة :

أولا : SOP ثانياً : POS

ثانياً : لإيجاد POS نضرب الحدود M التي عندها F=0

A	B	C	F	
0	0	0	1	
0	0	1	0	M_1
0	1	0	1	
0	1	1	0	M_3
1	0	0	0	M_4
1	0	1	1	
1	1	0	0	M_6
1	1	1	1	

$$F = M_1 . M_3 . M_4 . M_6$$

$$F = \prod M(1,3,4,6)$$

$$F = \left(X + Y + \overline{Z}\right).\left(X + \overline{Y} + \overline{Z}\right).\left(\overline{X} + Y + Z\right).\left(\overline{X} + \overline{Y} + Z\right)$$

تبسيط الصيغ القانونية :

- نبدأ من جدول الحقيقة
- نكتبها بالصيغة القانونية
- نستخدم الجبر البولي لتبسيط المعادلة :

$$F(A,B,C)=\sum m(1,4,5,6,7)$$

$$F=\bar{A}\bar{B}C+A\overline{BC}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$$

$$F=\bar{A}\bar{B}C+A\overline{BC}+A\bar{B}C+AB\bar{C}+ABC$$

$$F=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}(\bar{C}+C)+AB(\bar{C}+C)$$

$$F=\bar{A}\bar{B}C+A\bar{B}+AB$$

$$F=\bar{A}\bar{B}C+A(\bar{B}+B)$$

$$F=\bar{A}\bar{B}C+A$$

$$F=\bar{B}C+A$$

عبر عن الدالة المنطقية $E = \overline{Y} + \overline{XZ}$ في صورة

1- SOP   2- POS

- نكتب جدول الصدق للمعادلة E

X	Y	Z	$\overline{Y}$	$\overline{X}$	$\overline{Z}$	$\overline{XZ}$	E	
0	0	0	1	1	1	1	1	m_0
0	0	1	1	1	0	0	1	m_1
0	1	0	0	1	1	1	1	m_2
0	1	1	0	1	0	0	0	M_3
1	0	0	1	0	1	0	1	m_4
1	0	1	1	0	0	0	1	m_5
1	1	0	0	0	1	0	0	M_6
1	1	1	0	0	0	0	0	M_7

- لايجاد SOP نجمع الحدود m التي عندها E = 1

$$E = m_0 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5$$

$$E(X,Y,Z) = \sum m(0,1,2,4,5)$$

$$E(X,Y,Z) = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z$$

- لايجاد POS نضرب الحدود M التي عندها E = 0

$$E = M_3 + M_6 + M_7$$

$$E = \prod M(3.6.7)$$

$$E(X,Y,Z) = \left(X + \overline{Y} + \overline{Z}\right).\left(\overline{X} + \overline{Y} + Z\right).\left(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}\right)$$